Untersuchungen über Parallelmengen im euklidischen Raum

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER UNIVERSITÄT BERN

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

Berthold Schenker

von Gretzenbach (Kt. Solothurn)

Zürich 1956
Dissertationsdruckerei Leemann AG

Untersuchungen über Parallelmengen im euklidischen Raum

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER UNIVERSITÄT BERN

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

Berthold Schenker

von Gretzenbach (Kt. Solothurn)

Zürich 1956
Dissertationsdruckerei Leemann AG

Von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag des Herrn Prof. Dr. Hadwiger angenommen.

Bern, den 19. April 1955.

Der Dekan:
Feitknecht

Meinen verehrten ehemaligen Lehrern, den Herren Professoren Crelier, Feitknecht, Gonseth, Gruner, Hadwiger, Herbertz, Kohlschütter, Mauderli, Mercier, Michel, Scherrer, Sganzini und Signer möchte ich an dieser Stelle für all das danken, was sie mir durch ihren Unterricht geboten haben.

Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. Hadwiger, unter dessen wohlwollender Leitung diese Arbeit entstand.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547619_0122

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 7

§ 1. Bezeichnungen und allgemeine Formeln aus der Mengenlehre . . 9

§ 2. Die Operatoren C_α und $C_{-\alpha}$ 11
A. Definitionen 11
B. Monotonierelationen 12
C. Beziehung zwischen den Mengen $C_\alpha(A)$ und $C_{-\alpha}(A)$ 13
D. Verhalten der Operatoren C_α und $C_{-\alpha}$ bei Iteration 14
E. Relationen bei Mengenverknüpfungen 17

§ 3. Die Operatoren H_α und $H_{-\alpha}$ 19
A. Definitionen 19
B. Monotonierelationen 21
C. Beziehungen zwischen den Operatoren H_α und $H_{-\alpha}$ 21
D. Verhalten bei Iteration 22
E. Verhalten bei Mengenverknüpfungen 23

§ 4. Lote 23
A. Definitionen und Bezeichnungen 24
B. Verkürzbarkeit und Verlängerbarkeit von Loten 26
C. Undurchdringlichkeit der Lote 27
D. Sätze vermischten Inhalts 28
E. Lotketten 29

§ 5. Die Operatoren L_α und $L_{-\alpha}$ 30
A. Definitionen und Bezeichnungen 30
B. Beziehungen zwischen den Operatoren L_α und $L_{-\alpha}$ 31
C. Verhalten des L-Operators bei Mengenverknüpfungen 33
D. Beziehung zwischen den L- und C-Operatoren 33
E. Verhalten des L-Operators bei Iteration. Monotonieeigenschaften 35

§ 6. Äquivalente Aussagen 38

§ 7. Schranken für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in einigen abgeleiteten Mengenungleichungen 42

§ 8. Vergleich der verschiedenen Schranken 45

§ 9. Konvexe Mengen 47

§ 10. Unterkonvexe Mengen 52

§ 11. Überkonvexe Mengen 57

§ 12. Kriterien für die Gültigkeit der Gleichung $C_\alpha(A)C_\alpha(B) = C_\alpha(AB)$ 58

§ 13. Volumenbetrachtungen 61

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Eigenschaften von Parallelmengen (Cantor-Minkowskischen Mengen) im n-dimensionalen, euklidischen Raum. Dabei werden möglichst allgemein gültige Ergebnisse angestrebt, weshalb über die Mengen, von welchen die Parallelmengen gebildet werden, keine Voraussetzungen gemacht worden sind als die (bequeme) Abgeschlossenheit, bei dem kurzen Kapitel über Volumenbetrachtungen (§ 13) natürlich auch die Beschränktheit.

Zuerst wird in § 1 an einige Begriffe, Bezeichnungen und einfache Relationen aus der allgemeinen Mengenlehre und der Punktmengenlehre erinnert, von denen später Gebrauch gemacht wird.

In § 2 werden zuerst die Begriffe der äußeren und innern Parallelmenge eingeführt und sodann die formalen Regeln abgeleitet, welche das Operieren mit Parallelmengen beherrschen. Dabei ist Wert gelegt auf übersichtlichen und symmetrischen Aufbau, symmetrisch in dem Sinne, daß die einander entsprechenden Rechenregeln für äußere und innere Parallelmengen einander gegenübergestellt werden.

§ 3 beginnt mit der Einführung der Begriffe der äußeren und innern α-Hülle, von denen die erstere eine Verallgemeinerung des Begriffes der konvexen Hülle darstellt. Obschon sich diese Begriffe auf diejenigen der äußeren und inneren Parallelmenge zurückführen lassen, so legt ihre eigenständige Bedeutung es doch nahe, für sie eine besondere Bezeichnung einzuführen und die für sie geltenden Operationsregeln einer besonderen Betrachtung zu unterziehen. Dabei stellt sich heraus, daß die allgemein gültigen formalen Regeln für das Operieren mit diesen Mengen gegenüber den Parallelmengen geringer an Zahl sind und insbesondere weniger Relationen auftreten, wo das Gleichheitszeichen gilt.

In § 4 werden die Eigenschaften von Loten gefällt auf eine ge-

gebene Menge untersucht, vor allem soweit sie im folgenden gebraucht werden.

Gegenstand von § 5 bilden die wenigen allgemein gültigen formalen Regeln, die das Operieren mit Mengen $\dot{L}_\alpha(A)$, bestehend aus allen Loten konstanter Länge α gefällt auf A, beherrschen. — Insbesondere werden auch die Beziehungen des Operators C (Übergang zur Parallelmenge) zum L-Operator (Übergang zur Lotmenge) untersucht.

§ 6 setzt sich zur Aufgabe, gewisse Aussagen über Parallel- und Lotmengen auf ihre Äquivalenz hin zu untersuchen.

In bestimmten, von einem gewissen Parameter α abhängigen Aussagen über Parallelmengen und Lotmengen gibt es eine größte Zahl s_1 mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha < s_1$ die Aussage noch gilt, und eine kleinste Zahl s_2 mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha > s_2$ die Aussage nicht mehr gilt. Diese beiden Zahlen können auch zusammenfallen. In § 7 wird untersucht, wann diese Schranken zusammenfallen und wann nicht, während im folgenden § 8 die Schranken bei verschiedenen Aussagen verglichen werden.

Den Gegenstand von § 9 bilden einige Eigenschaften konvexer Körper.

In § 10 wird nach Verallgemeinerungen der konvexen Mengen Ausschau gehalten. Für jede Menge wird dabei in Anlehnung an eine analoge Begriffsbildung von *H. Hadwiger* ein Unterkonvexitätsgrad g eingeführt ($0 \leqq g < \infty$), wobei die konvexen Mengen als unterkonvex vom Grade ∞ erscheinen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Definition eines solchen, einer beliebigen Menge zugeordneten Unterkonvexitätsgrades. Wie für *H. Hadwiger* war für uns dabei in erster Linie die Gültigkeit der Steiner-Minkowskischen Formel für das Volumen $VC_\alpha(A)$ der Parallelmenge $C_\alpha(A)$ im Abstand α einer Menge A leitend, d. h. die Darstellbarkeit von $VC_\alpha(A)$ durch ein Polynom von höchstens n. Grade in α. Der Unterkonvexitätsgrad g soll möglichst so definiert werden, daß $\alpha \leqq g$ notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Steiner-Minkowskischen Formel ist. Gesicherte Ergebnisse in dieser Hinsicht zu erzielen ist uns allerdings nicht gelungen, was bei der praktisch völligen Voraussetzungslosigkeit über die Menge A auch sehr schwierig sein dürfte.

Im § 11 wird im Zusammenhang mit der Darstellbarkeit des Volumens $VC_{-\alpha}(A)$ der innern Parallelmenge $C_{-\alpha}(A)$ von A als Polynom von höchstens n. Grade in α ein Überkonvexitätsbegriff eingeführt, der aber nicht etwa eine Spezialisierung der konvexen Mengen bedeutet. Nach dem Vorgehen von *H. Hadwiger* in ähnlicher Lage, wird vielmehr eine Menge als überkonvex von einem gewissen Grade erklärt, wenn ihre abgeschlossene Komplementärmenge unterkonvex von diesem Grade ist.

§ 12 bringt hinreichende Kriterien für die Gültigkeit der Gleichung $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)=C_\alpha(A\,B)$, gibt also insbesondere Antwort auf die Frage, wann der Durchschnitt zweier Parallelmengen wiederum eine solche ist. Eines dieser als hinreichend erkannten Kriterien ist vermutlich auch notwendig für die Gültigkeit der obigen Gleichung. Diese Fragen geben Anlaß zur Definition verschiedener Gradzahlen bei Vereinigungsmengen $A+B$ zweier Mengen A und B. Diese Begriffe sind schwächere Fassungen analoger, in § 10 gegebener Definitionen eines Unterkonvexitätsgrades von $A+B$, haben aber nur Sinn für Vereinigungsmengen.

Der letzte § 13 schließlich bringt einige Anwendungen der Ergebnisse früherer, insbesondere des vorangehenden § 12 auf das Volumen von Parallelmengen, vornehmlich bei Mengenverknüpfungen. So wird untersucht, wann in folgenden bewiesenen Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt:

$$VC_\alpha(A)+VC_\alpha(B)\geqq VC_\alpha(A+B)+VC_\alpha(A\,B)$$
$$VC_{-\alpha}(A)+VC_{-\alpha}(B)\leqq VC_{-\alpha}(A+B)+VC_{-\alpha}(A\,B).$$

§ 1. Bezeichnungen und allgemeine Formeln aus der Mengenlehre

(1.1) Gegenstand der Betrachtungen sind abgeschlossene Punktmengen des euklidischen n-dimensionalen Raumes R_n, die wir mit $A, B, C, D, \ldots$ bezeichnen.

(1.2) $P\in A$ soll bedeuten, daß P ein Punkt von A ist. Punkte werden mit $P, Q, R, S, T, X, Y, \ldots$ bezeichnet. Allgemeiner bedeutet $E\in A$, daß E Teilmenge der Punktmenge A

ist, die sich als Vereinigungsmenge von zu E kongruenten Mengen darstellen läßt, z. B. aus Strecken fester Länge oder als Vereinigungsmenge von gleich großen Kugeln usw. $B \subset A$ oder $A \supset B$ heißt B ist echte Teilmenge von A, während $B \subseteq A$ ausdrücken soll, daß B echte oder unechte Teilmenge von A ist.

(1.3) Mit $\underline{A}$ wird der offene Kern, mit $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A bezeichnet. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist $A = \bar{A}$.

(1.4) $A + B$ und $A\,B$ bezeichnen die Vereinigungsmenge bzw. den Durchschnitt von A und B.

(1.5) Unter $K(A)$ oder A^* ist die Komplementärmenge von A zu verstehen.

(1.6) $A - B$ bedeutet den Durchschnitt von A mit $K(B)$: $A - B = A\,K(B)$.

(1.7) Mit $G(A)$ wird der Rand einer Menge A bezeichnet.

Für die Operatoren K und G gelten u. a. folgende Relationen:

(1.8) $K\,K(A) = A$

(1.9) $K(A) + K(B) = K(A\,B)$

(1.10) $K(A + B) = K(A)\,K(B)$

(1.11) $K(A) - K(B) = B - A$

(1.12) $K(A - B) = K(A) + B$

(1.13) $(A + B) - B = A - B$

(1.14) $(A - B) + B = A + B$

(1.15) $A - (B + C) = A - B - C$

(1.16) Aus $A \supset B$ folgt $K(A) \subset K(B)$

(1.17) $(A - B) + (C - D) \supseteq (A + C) - (B + D)$

(1.18) $G(A) = G(A^*)$

(1.19) $G(A) + G(B) = G(A + B) + G(A\,B)$.

Wenn A und B nicht abgeschlossen wären, so würde hier nur das Zeichen $\supseteq$ gelten.

(1.20) $G(A)\,G(B) \subseteq G(A\,B)$.

Für nicht abgeschlossene Mengen A und B wäre diese Relation nicht allgemein richtig.

(1.21) Aus $\underline{A} \supset \bar{B} = B$ folgt $G(A) + G(B) = G(A - B)$.

§ 2. Die Operatoren C_α und $C_{-\alpha}$

A. Definitionen

(2.1) Unter der α-Umgebung $C_\alpha(P)$ eines Punktes P versteht man bekanntlich die offene Kugel vom Radius α und Zentrum P. Man kann diesen Begriff auf beliebige Punktmengen übertragen: Die α-Umgebung einer Menge A ist die Vereinigungsmenge der α-Umgebungen aller Punkte von A. Statt α-Umgebung von A ist aber die Bezeichnung „äußere Parallelmenge von A im Abstand α" gebräuchlich. Diese Menge sei mit $C_\alpha(A)$ bezeichnet. Der heute viel gebrauchte Begriff der äußeren Parallelmenge wurde z. B. von *Minkowski* [1] verwendet bei seinen Definitionen von Oberfläche und Volumen. Über die weitere vielseitige Anwendungsmöglichkeit dieses Begriffes orientiert *Durand* [1], S. 342—343.

(2.2) Mengen, die sich als äußere Parallelmengen einer andern Menge darstellen lassen, die also Vereinigungsmengen offener Kugeln sind, heißen Cantor-Minkowskische Mengen.

Äquivalent mit der gegebenen Definition von $C_\alpha(A)$ sind die folgenden beiden:

(2.3) $C_\alpha(A)$ ist die Menge aller Punkte, die von mindestens einem Punkte von A einen Abstand $< \alpha$ haben.

(2.4) $C_\alpha(A)$ ist die Menge der Mittelpunkte aller offenen Kugeln vom Radius α, die mit A nicht-leeren Durchschnitt haben.

Die innere Parallelmenge $C_{-\alpha}(A)$ ist definiert durch die Gleichung

(2.1)* $$C_{-\alpha}(A) = K C_\alpha K(A)^1).$$

In Worten: $C_{-\alpha}(A)$ ist die Menge aller Punkte, die von jedem Punkte von $K(A)$ einen Abstand $> \alpha$ haben.

Damit äquivalent sind folgende Formulierungen:

---

[1]) Den Begriff der innern Parallelmenge hat erstmals *F. Riesz* [1] in die Geometrie eingeführt. Er wurde später verschiedentlich in der Integralgeometrie verwendet. So von *T. Kaluza*, *G. Bol* [1], *Sz. Nagy* [1], *H. Hadwiger* [1]—[5] u. a.

(2.3)* $C_{-\alpha}(A)$ ist die Komplementärmenge der Punktmenge bestehend aus allen offenen Kugeln vom Radius α mit Zentrum in $K(A)$.

(2.4)* $C_{-\alpha}(A)$ ist die Menge der Mittelpunkte aller offenen Kugeln vom Radius α, die ganz in A liegen, also mit $K(A)$ leeren Durchschnitt haben.

(2.5) $C_{\alpha}(A)$ ist als Vereinigungsmenge offener Kugeln offen.

(2.5)* $C_{-\alpha}(A)$ ist als Komplementärmenge der nach (2.5) offenen Menge $C_{\alpha}K(A)$ abgeschlossen.

(2.6) Es ist $C_{\alpha}(R_n) = R_n$, ferner setzt man $C_{\alpha}(0) = 0$, woraus formal aus (2.1)* folgt, daß man zu setzen hat $C_{-\alpha}(R_n) = R_n$ und $C_{-\alpha}(0) = 0$.

(2.7) Schließlich führen wir für die nicht in A liegenden Punkte von $C_{\alpha}(A)$ die Bezeichnung $\dot{C}_{\alpha}(A)$ ein. Es ist also definitionsgemäß:

$$\dot{C}_{\alpha}(A) = C_{\alpha}(A) - A = C_{\alpha}(A)\,K(A).$$

(2.7)* Unter $\dot{C}_{-\alpha}(A)$ ist $\dot{C}_{\alpha}(A^*)$ zu verstehen.

B. Monotonierelationen

(2.8) Aus $\alpha > \beta$ folgt $C_{\alpha}(A) \supseteq C_{\beta}(A)$. — Ist nämlich P ein beliebiger Punkt von A, so ist $C_{\alpha}(P) \supset C_{\beta}(P)$. Da dies für jeden Punkt von A gilt, so muß im Hinblick auf die Definition (2.1) $C_{\alpha}(A) \supseteq C_{\beta}(A)$ sein.

(2.8)* Aus $\alpha > \beta$ folgt $C_{-\alpha}(A) \subseteq C_{-\beta}(A)$. — Zum Beweise setze man in (2.8) anstelle von A die Menge $K(A)$. Man erhält $C_{\alpha}K(A) \supseteq C_{\beta}K(A)$. Hierauf den Operator K angewendet gibt $KC_{\alpha}K(A) \subseteq KC_{\beta}K(A)$, d. h. $C_{-\alpha}(A) \subseteq C_{-\beta}(A)$.

(2.9) Aus $A \supset B$ folgt $C_{\alpha}(A) \supseteq C_{\alpha}(B)$. — Wegen $A \supset B$ ist nämlich die Umgebung $C_{\alpha}(P)$ jedes Punktes von B zugleich Umgebung eines Punktes von A, woraus im Hinblick auf die Definition (2.1) folgt $C_{\alpha}(A) \supseteq C_{\alpha}(B)$.

(2.9)* Aus $A \supset B$ folgt $C_{-\alpha}(A) \supseteq C_{-\alpha}(B)$. — (2.9)* folgt aus (2.9) durch den Übergang $A \to K(A)$.

An dieser Stelle sei noch ein Satz erwähnt, der später verschiedentlich verwendet wird:

(2.10) Die Hinzufügung von Randpunkten einer Menge zu dieser Menge hat keinen Einfluß auf die äußere Parallelmenge. Es ist also insbesondere, wenn A hier jetzt ausnahmsweise nicht eine abgeschlossene, sondern eine beliebige Menge bedeutet:

$$C_\alpha(\bar{A}) = C_\alpha(A)^2).$$

(2.10)* Dual dazu gilt: Die Wegnahme von Randpunkten einer Menge aus dieser Menge hat keinen Einfluß auf die innere Parallelmenge. Es ist also insbesondere, wenn auch hier A wieder eine beliebige, nicht unbedingt abgeschlossene Menge bedeutet:

$$C_{-\alpha}(\underline{A}) = C_{-\alpha}(A)$$

Beweis: Setzt man in (2.10) anstelle von A die Menge A^*, so erhält man $C_\alpha(\bar{A}^*) = C_\alpha(A^*)$, anders geschrieben $C_\alpha K(\underline{A}) = C_\alpha K(A)$. Hierauf den Operator K angewendet gibt $K C_\alpha K(\underline{A}) = K C_\alpha K(A)$, also $C_{-\alpha}(\underline{A}) = C_{-\alpha}(A)$.

C. Beziehung zwischen den Mengen $C_\alpha(A)$ und $C_{-\alpha}(A)$

Zwischen den Mengen $C_\alpha(A)$ und $C_{-\alpha}(A)$ besteht die folgende Beziehung

(2.11)
$$C_\alpha(A) = C_{-\alpha}(A) + C_\alpha G(A)$$

Beweis: a) Aus $G(A) \subseteq A$ folgt $C_\alpha G(A) \subseteq C_\alpha(A)$. Ferner ist $C_{-\alpha}(A) \subseteq C_\alpha(A)$. Somit ist $C_\alpha(A) \supseteq C_{-\alpha}(A) + C_\alpha G(A)$.

b) Es sei $P \in C_\alpha(A)$. Nach (2.4) liegt somit in $C_\alpha(P)$ mindestens ein Punkt $Q \in A$. Ist nun P kein Punkt von $C_{-\alpha}(A)$, so muß er sicher in $K C_{-\alpha}(A) = C_\alpha K(A)$ liegen. Wiederum nach (2.4) liegt dann in $C_\alpha(P)$ ein Punkt $R \in K(A)$. Weil $Q \in A$ und $R \in K(A)$, so liegt auf QR ein Punkt $S \in G(A)$. Mit Q und R liegt aber (wegen der Konvexität von $C_\alpha(P)$) auch S in $C_\alpha(P)$, somit umgekehrt P in $C_\alpha(S) \subseteq C_\alpha G(A)$. — Es ist also $C_\alpha(A) \subseteq C_{-\alpha}(A) + C_\alpha G(A)$. Aus a) und b) folgt (2.11).

---

[2]) *Durand* [1], S. 344.

Da die beiden Mengen rechts in (2.11) punktfremd sind, kann man auch schreiben:

(2.12) $$C_\alpha(A) - C_{-\alpha}(A) = C_\alpha G(A), \text{ anders geschrieben}$$

(2.13) $$C_\alpha(A)\, C_\alpha(A^*) = C_\alpha G(A), \text{ oder schließlich}$$

(2.14) $$\dot{C}_\alpha(A) + \dot{C}_\alpha(A^*) = C_\alpha G(A).$$

(2.14) läßt sich formal aus (2.13) ableiten. Es ist nämlich:

$$C_\alpha(A)\, C_\alpha(A^*) = [\dot{C}_\alpha(A) + A][\dot{C}_\alpha(A^*) + A^*] =$$
$$= \dot{C}_\alpha(A)\, \dot{C}_\alpha(A^*) + A\, \dot{C}_\alpha(A^*) + \dot{C}_\alpha(A)\, A^* + A\, A^*.$$

$A\, A^*$ ist leer; für das zweite und dritte Glied können wir wegen $\dot{C}_\alpha(A^*) \subseteq A$ und $\dot{C}_\alpha(A) \subseteq A^*$ auch schreiben $\dot{C}_\alpha(A^*)$ bzw. $\dot{C}_\alpha(A)$, dann ist aber das erste Glied in diesen beiden enthalten, so daß (2.14) folgt.

D. Verhalten der Operatoren C_α und $C_{-\alpha}$ bei Iteration

Die äußere Parallelmenge einer äußeren Parallelmenge ist wieder eine solche. — Genauer gilt:

(2.15) $$C_\alpha C_\beta(A) = C_{\alpha+\beta}(A)$$ [3])

Beweis: a) Zu beliebigem $P \in C_\alpha C_\beta(A)$ existiert ein Punkt $Q \in C_\beta(A)$ mit $\overline{PQ} < \alpha$. Zu Q existiert seinerseits ein Punkt $R \in A$ mit $\overline{QR} < \beta$. Nun ist $\overline{PR} \leqq \overline{PQ} + \overline{QR}$, somit $\overline{PR} < \alpha + \beta$, das heißt aber $P \in C_{\alpha+\beta}(A)$.

b) Zu beliebigem $P \in C_{\alpha+\beta}(A)$ existiert ein Punkt $R \in A$ mit $\overline{PR} < \alpha + \beta$. Auf $\overline{PR}$ gibt es einen Punkt Q mit $\overline{QR} = \beta$, so daß $Q \in \bar{C}_\beta(A)$ ist. Da weiter $\overline{PQ} < \alpha$ ist, so folgt unter Beachtung von (2.10) $P \in C_\alpha \bar{C}_\beta(A) = C_\alpha C_\beta(A)$.

Dual zu (2.15) gilt:

(2.15)* $$C_{-\alpha} C_{-\beta}(A) = C_{-(\alpha+\beta)}(A).$$

Setzt man nämlich in (2.15) anstelle von A die Menge $K(A)$, so erhält man $C_\alpha C_\beta K(A) = C_{\alpha+\beta} K(A)$. Wendet man

[3]) Siehe z. B. *Durand* [1], S. 386, Fußnote 2.

hierauf den Operator K an und schreibt nach (1.8) $C_\alpha K(A) = K K C_\alpha K(A)$, so folgt $K C_\alpha K K C_\beta K(A) = K C_{\alpha+\beta} K(A)$, d. h. $C_{-\alpha} C_{-\beta}(A) = C_{-(\alpha+\beta)}(A)$.

Wir denken uns auf A den Operator C_α ausgeübt und von der erhaltenen Menge die Komplementärmenge genommen. Auf die so erhaltene Menge $K C_\alpha(A)$ wenden wir wiederum den Operator C_α an und nehmen vom Ergebnis die Komplementärmenge. Die auf diese Weise erhaltene Menge $K C_\alpha K C_\alpha(A) = C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ enthält A:

(2.16) $$C_{-\alpha} C_\alpha(A) \supseteq A$$ [4])

Beweis: $C_{-\alpha} C_\alpha(A) = K C_\alpha K C_\alpha(A)$ ist die Menge aller Punkte, die von jedem Punkte von $K C_\alpha(A)$ einen Abstand $\geqq \alpha$ haben. Alle Punkte von A haben aber sicher von jedem Punkte von $K C_\alpha(A)$ einen Abstand $\geqq \alpha$. Somit ist $K C_\alpha K C_\alpha(A) \supseteq A$.

Als duales Gegenstück zu (2.16) gilt:

(2.16)* $$C_\alpha C_{-\alpha}(A) \subseteq \underline{A}$$ [5])

Setzt man nämlich in (2.16) anstelle von A die abgeschlossene Hülle $\overline{K}(A)$ von $K(A)$, so erhält man $C_{-\alpha} C_\alpha \overline{K}(A) \supseteq \overline{K}(A)$. Nach (2.10) kann man dafür auch schreiben $C_{-\alpha} C_\alpha K(A) \supseteq \overline{K}(A)$. Hierauf den Operator K angewendet gibt $K C_{-\alpha} C_\alpha(A) \subseteq K K(A)$, d. h. $C_\alpha C_{-\alpha}(A) \subseteq \underline{A}$.

Nach (2.16) ist $C_{-\alpha} C_\alpha(B) \supseteq B$. Ist hier B eine innere Parallelmenge $B = C_{-\alpha}(A)$ (oder auch $B = C_{-\beta}(A)$ mit $\beta > \alpha$), so gilt in (2.16) das Gleichheitszeichen:

(2.17) $$C_{-\alpha} C_\alpha C_{-\alpha}(A) = C_{-\alpha}(A)$$

Beweis: Nach (2.16) ist $C_{-\alpha} C_\alpha(A) \supseteq A$. Setzt man hier anstelle von A die Menge $C_{-\alpha}(A)$, so folgt $C_{-\alpha} C_\alpha C_{-\alpha}(A) \supseteq C_{-\alpha}(A)$. Anderseits ist $C_\alpha C_{-\alpha}(A) \subseteq A$. Wendet man hierauf den Operator $C_{-\alpha}$ an, so folgt $C_{-\alpha} C_\alpha C_{-\alpha}(A) \subseteq C_{-\alpha}(A)$. Somit ist $C_{-\alpha} C_\alpha C_{-\alpha}(A) = C_{-\alpha}(A)$.

Aus (2.17) erhält man durch den Übergang $A \to K(A)$:

(2.17)* $$C_\alpha C_{-\alpha} C_\alpha(A) = C_\alpha(A).$$

[4]) Siehe etwa *Chamard* [1].

[5]) *H. Hadwiger* [4], Schlußbemerkung.

Eine sinngemäße Erweiterung der Beziehung (2.16) ist die folgende:

(2.18) $$C_{-\alpha}C_{\alpha}(A) \supseteq C_{-\beta}C_{\beta}(A), \text{ falls } \alpha > \beta^{6}).$$

Zum Beweise setzen wir $\alpha = \beta + \epsilon$, dann ist unter Benützung von (2.15) und (2.15)* $C_{-\alpha}C_{\alpha}(A) = C_{-\beta-\epsilon}C_{\beta+\epsilon}(A) = C_{-\beta}C_{-\epsilon}C_{\epsilon}C_{\beta}(A)$. Nun ist aber nach (2.16) $C_{-\epsilon}C_{\epsilon}C_{\beta}(A) \supseteq C_{\beta}(A)$. Somit ist $C_{-\alpha}C_{\alpha}(A) = C_{-\beta}C_{-\epsilon}C_{\epsilon}C_{\beta}(A) \supseteq C_{-\beta}C_{\beta}(A)$. Durch den Übergang $A \to K(A)$ erhält man aus (2.18)

(2.18)* $$C_{\alpha}C_{-\alpha}(A) \subseteq C_{\beta}C_{-\beta}(A), \text{ falls } \alpha > \beta.$$

Aus (2.18) und (2.18)* ergeben sich die Folgerungen:

(2.19) Aus $\alpha > \beta$ und $C_{-\alpha}C_{\alpha}(A) = A$ folgt $C_{-\beta}C_{\beta}(A) = A$.

(2.19)* Aus $\alpha > \beta$ und $C_{\alpha}C_{-\alpha}(A) = \underline{A}$ folgt $C_{\beta}C_{-\beta}(A) = \underline{A}$.

Bisher war stets $\alpha > 0$ vorausgesetzt. $C_{\alpha}(A)$ war also für $\alpha = 0$ gar nicht definiert. Wir können aber die naheliegende Festsetzung treffen, daß $C_0(A)$ gleich A sein soll. Die Relationen (2.16) und (2.16)* lassen sich dann so zusammenfassen:

$$C_{\alpha}C_{-\alpha}(A) \subseteq C_0(A) \subseteq C_{-\alpha}C_{\alpha}(A).$$

Diese Beziehungen gestatten folgende Verallgemeinerung

(2.20) $$C_{\alpha}C_{-\beta}(A) \subseteq C_{\alpha-\beta}(A) \subseteq C_{-\beta}C_{\alpha}(A)$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die rechte Hälfte der Relation und unterscheiden zwei Fälle: a) $\alpha > \beta$. Wir setzen $\alpha = \beta + \epsilon$, so daß unter Verwendung von (2.15) und (2.16) folgt $C_{-\beta}C_{\alpha}(A) = C_{-\beta}C_{\beta+\epsilon}(A) = C_{-\beta}C_{\beta}C_{\epsilon}(A) \supseteq C_{\epsilon}(A) = C_{\alpha-\beta}(A)$.

b) $\alpha < \beta$. Man setzt $\beta = \alpha + \epsilon$ und erhält unter Verwendung von (2.15)*, (2.16)* und (2.9)* $C_{-\beta}C_{\alpha}(A) = C_{-\alpha-\epsilon}C_{\alpha}(A) = C_{-\epsilon}C_{-\alpha}C_{\alpha}(A) \supseteq C_{-\epsilon}(A) = C_{\alpha-\beta}(A)$. — Die linke Hälfte von (2.20) beweist man ähnlich.

Aus (2.20) folgt, daß das kommutative Gesetz $C_{\alpha}C_{-\beta}(A) = C_{-\beta}C_{\alpha}(A)$ für „Parameter" α, $-\beta$ verschiedenen Vorzeichens genau dann gilt, wenn das additive Gesetz in den

[6]) Siehe z. B. *L. Chamard* [1].

beiden Formen gilt $C_\alpha C_{-\beta}(A) = C_{\alpha-\beta}(A)$ und $C_{\ \beta} C_\alpha(A) = C_{\alpha-\beta}(A)$.

Man kann sich leicht überzeugen, daß in allen früheren und allen in diesem und dem nächsten Paragraphen noch folgenden Relationen irgendeiner der Parameter α, β, $\alpha+\epsilon$ usw. auch 0 sein kann.

Es sei $\epsilon > 0$, dann gilt

(2.21) $$C_{-(\alpha+\epsilon)} C_{\beta+\epsilon}(A) \supseteq C_{-\alpha} C_\beta(A)$$

(2.21)* $$C_{\alpha+\epsilon} C_{-(\beta+\epsilon)}(A) \subseteq C_\alpha C_{-\beta}(A).$$

Beweis zu (2.21): Nach (2.16) ist $C_{-\epsilon} C_\epsilon C_\beta(A) \supseteq C_\beta(A)$. Hieraus folgt $C_{-\alpha} C_{-\epsilon} C_\epsilon C_\beta(A) \supseteq C_{-\alpha} C_\beta(A)$, d. h. zufolge (2.15) und (2.15)* $C_{-(\alpha+\epsilon)} C_{\beta+\epsilon}(A) \supseteq C_{-\alpha} C_\beta(A)$.

(2.21)* folgt aus (2.21) durch den Übergang $A \to K(A)$. — (2.21) und (2.21)* enthalten gewisse frühere Relationen als Spezialfälle, nämlich (2.18) bzw. (2.18)* für $\alpha = \beta$; die linke Hälfte von (2.20) entsteht aus (2.21)* für $\beta = 0$ und die Übergänge $\alpha+\epsilon \to \alpha$, $\epsilon \to \beta$, $\alpha \to \alpha-\beta$, die rechte Hälfte von (2.20) aus (2.21) für $\alpha = 0$ und die Übergänge $\beta \to \alpha-\beta$, $\epsilon \to \beta$, $\beta+\epsilon \to \alpha$, endlich (2.16) aus (2.21) für $\alpha = \beta = 0$ und den Übergang $\epsilon \to \alpha$.

E. Relationen bei Mengenverknüpfungen

Unmittelbar aus der Definition (2.1) folgt die Relation

(2.22) $$C_\alpha(A+B) = C_\alpha(A) + C_\alpha(B).$$

Durch die Übergänge $A \to K(A)$, $B \to K(B)$ gewinnt man hieraus weiter:

(2.22)* $$C_{-\alpha}(A\,B) = C_{-\alpha}(A)\, C_{-\alpha}(B)$$

Beweis: $C_\alpha[K(A)+K(B)] = C_\alpha K(A) + C_\alpha K(B)$; oder nach (1.9) $C_\alpha K(A\,B) = C_\alpha K(A) + C_\alpha K(B)$, also bei Verwendung von (1.10) $K C_\alpha K(A\,B) = K C_\alpha K(A)\, K C_\alpha K(B)$, d. h. $C_{-\alpha}(A\,B) = C_{-\alpha}(A)\, C_{-\alpha}(B)$.

Durch den Übergang $B \to K(B)$ erhält man aus (2.22)* noch:

(2.22)** $$C_{-\alpha}(A-B) = C_{-\alpha}(A) - C_{\alpha}(B)$$

Beweis: $C_{-\alpha}(A-B) = C_{-\alpha}(A\,K(B)) = C_{-\alpha}(A)\,C_{-\alpha}(K(B)) = C_{-\alpha}(A)\,K\,C_{\alpha}\,K\,K(B) = C_{-\alpha}(A)\,K\,C_{\alpha}(B) = C_{-\alpha}(A) - C_{\alpha}(B)$.

Die (2.22) entsprechende Beziehung für innere Parallelmengen gilt im allgemeinen nicht, dagegen folgende Ungleichheitsbeziehungen:

(2.23.1), (2.23.2) $$C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B) + C_{\alpha}\,G(A)\,C_{\alpha}\,G(B) \supseteq C_{-\alpha}(A+B) \supseteq C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B).$$

Beweis zur rechten Hälfte: Aus $C_{-\alpha}(A+B) \supseteq C_{-\alpha}(A)$ und $C_{-\alpha}(A+B) \supseteq C_{-\alpha}(B)$ folgt durch Addition $C_{-\alpha}(A+B) \supseteq C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B)$. Beweis der linken Hälfte: Es sei $P \in C_{-\alpha}(A+B)$. Ist nun weder $P \in C_{-\alpha}(A)$ noch $P \in C_{-\alpha}(B)$, so liegt $C_{\alpha}(P)$ nach (2.4)* weder ganz in A noch ganz in B, aber wegen $P \in C_{-\alpha}(A+B)$ ganz in $A+B$, muß daher Punkte Q, R, S, T aus A, $K(A)$, B, $K(B)$ bez. enthalten und auf den Verbindungsstrecken QR und ST zwei Punkte $U \in G(A)$ bzw. $V \in G(B)$. Daher ist $P \in C_{\alpha}(U)\,C_{\alpha}(V) \subseteq C_{\alpha}\,G(A)\,C_{\alpha}\,G(B)$.

Aus (2.23) gewinnt man durch die Übergänge $A \to K(A)$, $B \to K(B)$:

(2.23.1)*, (2.23.2)* $$C_{\alpha}(A)\,C_{\alpha}(B) - C_{\alpha}\,G(A)\,C_{\alpha}\,G(B) \subseteq C_{\alpha}(A\,B) \subseteq C_{\alpha}(A)\,C_{\alpha}(B).$$

Weiter folgt aus (2.23)* durch den Übergang $B \to K(B)$:

(2.23.1)**, (2.23.2)** $$C_{\alpha}(A) - C_{-\alpha}(B) - C_{\alpha}\,G(A)\,C_{\alpha}\,G(B) \subseteq C_{\alpha}(A-B) \subseteq C_{\alpha}(A) - C_{-\alpha}(B).$$

Aus $C_{-\alpha}(A+B) \supseteq C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B)$ folgt $C_{-\alpha}C_{\alpha}C_{-\alpha}(A+B) \supseteq C_{-\alpha}C_{\alpha}(C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B))$, d. h. unter Berücksichtigung von (2.17):

(2.24) $$C_{-\alpha}(A+B) \supseteq C_{-\alpha}\,C_{\alpha}(C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B)).$$

Diese Beziehung bedeutet im Hinblick auf (2.16) eine Verschärfung von (2.23.2).

Durch die Übergänge $A \to K(A)$ und $B \to K(B)$ ergibt sich hieraus weiter:

(2.24)* $$C_\alpha(A\,B) \subseteq C_\alpha C_{-\alpha}(C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)),$$

in Anbetracht von (2.16)* eine Verschärfung von (2.23.2)*.

Endlich erhält man aus (2.24)* durch den Übergang $B \to K(B)$ eine Verschärfung von (2.23.2)**:

(2.24)** $$C_\alpha(A - B) \subseteq C_\alpha C_{-\alpha}(C_\alpha(A) - C_{-\alpha}(B)).$$

(2.25) $$C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B) \supseteq C_{-\alpha}(A + B) - C_\alpha G(A\,B).$$

Beweis: Unter sukzessiver Verwendung von (2.12), (1.17), (2.22), (1.19), (1.15), (2.12) ergibt sich:

$C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B) = [C_\alpha(A) - C_\alpha G(A)] + [C_\alpha(B) - C_\alpha G(A)] \supseteq$
$[C_\alpha(A) + C_\alpha(B)] - [C_\alpha G(A) + C_\alpha G(B)] = C_\alpha(A + B) -$
$C_\alpha[G(A) + G(B)] = C_\alpha(A + B) - C_\alpha[G(A + B) + G(A\,B)] =$
$C_\alpha(A + B) - C_\alpha G(A + B) - C_\alpha G(A\,B) = C_{-\alpha}(A + B) -$
$C_\alpha G(A\,B).$

Wir addieren beidseits (2.25) die Menge $C_\alpha G(A\,B)$. Dann wird die Mengenungleichung zur Gleichung, weil nach (2.23.2) die links sich ergebende Menge in der Menge rechts enthalten ist. Man erhält unter Beachtung von (1.14)

(2.26) $$C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B) + C_\alpha G(A\,B) = C_{-\alpha}(A + B) + C_\alpha G(A\,B).$$

Aus (2.25) bzw. (2.26) ergeben sich durch die Übergänge $A \to K(A)$ und $B \to K(B)$ die Beziehungen:

(2.25)* $$C_\alpha(A)\,C_\alpha(B) \subseteq C_\alpha[A\,B + G(A + B)]$$

(2.26)* $$C_\alpha(A)\,C_\alpha(B) - C_\alpha G(A + B) = C_\alpha(A\,B) - C_\alpha G(A + B)$$

Schließlich erhält man aus (2.25)* und (2.26)* durch den Übergang $B \to K(B)$:

(2.25)** $$C_\alpha(A) - C_{-\alpha}(B) \subseteq C_\alpha(A - B) + C_\alpha G(B - A)$$

(2.26)** $$C_\alpha(A) - C_{-\alpha}(B) - C_\alpha G(B - A) = C_\alpha(A - B) - C_\alpha G(B - A)$$

§ 3. Die Operatoren H_α und $H_{-\alpha}$

A. Definitionen

Die äußere α-Hülle. $KC_\alpha(A)$ bedeutet, wie aus (2.4) folgt, die Menge der Zentren aller offenen Kugeln vom

Radius α, die ganz in $K(A)$ liegen. $C_\alpha K C_\alpha(A)$ ist somit die Punktmenge gebildet aus diesen Kugeln. Daraus folgt:

(3.1) $K C_\alpha K C_\alpha(A) = C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ ist die Komplementärmenge der Punktmenge, gebildet aus allen offenen Kugeln vom Radius α, die ganz in $K(A)$ liegen. — Oder was dasselbe bedeutet:

(3.2) $C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ ist der Durchschnitt der Komplemente aller offenen Kugeln vom Radius α, die ganz in $K(A)$ liegen.

Wir wollen für diese Menge die kürzere Bezeichnung $H_\alpha(A)$ einführen und sie äußere α-Hülle von A nennen. Also $H_\alpha(A) = C_{-\alpha} C_\alpha(A)$.

Obschon also der Ausdruck $C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ aus den einfachen Operationen C_α und $C_{-\alpha}$ zusammengesetzt ist, besitzt er nach dem Gesagten eine eigenständige prägnante Bedeutung, so daß es nicht abwegig scheint, dafür die oben stehende kürzere Bezeichnung und einen besonderen Namen einzuführen.

(3.3) Die konvexe Hülle. (3.2) legt es nahe, unter $H_\infty(A)$ den Durchschnitt der Komplemente aller offenen Halbräume zu verstehen, die ganz in $K(A)$ liegen. Die Komplemente dieser offenen Halbräume sind aber alle abgeschlossenen Halbräume, die A enthalten. Demnach können wir sagen: Unter $H_\infty(A)$ verstehen wir den Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die A enthalten. Diese Menge ist aber unter dem Namen konvexe Hülle von A bekannt. Man beachte aber, daß diese Menge nur auf Grund des Wortlautes in (3.2) definiert ist, aber nicht auf Grund einer Gleichung $H_\infty(A) = K C_\infty K C_\infty(A)$, deren rechte Seite sinnlos wäre.

(3.1)* Die innere α-Hülle. Im Hinblick auf (2.4)* ist $C_\alpha C_{-\alpha}(A)$ die Vereinigungsmenge aller offenen Kugeln vom Radius α, die ganz in A liegen. Wir bezeichnen diese Menge mit $H_{-\alpha}(A)$ und nennen sie innere α-Hülle von A. Also: $H_{-\alpha}(A) = C_\alpha C_{-\alpha}(A)$. $H_{-\alpha}(A)$ ist offen.

(3.3)* Unter $H_{-\infty}(A)$ wird man wiederum naheliegenderweise die Vereinigungsmenge aller offenen Halbräume verstehen,

die ganz in A liegen. Ist A beschränkt, so ist natürlich $H_{-\infty}(A)$ leer.

(3.4) Für die in $K(A)$ liegende Teilmenge von $H_\alpha(A)$ brauchen wir, ähnlich wie früher beim Operator C_α, die Bezeichnung $\dot{H}_\alpha(A)$. Es ist also $\dot{H}_\alpha(A) = H_\alpha(A) - A = H_\alpha(A) K(A)$.

(3.4)* Unter $\dot{H}_{-\alpha}(A)$ ist die Menge $\dot{H}_\alpha(A^*)$ zu verstehen. Die Operatoren $H_{-\alpha}$ und H_α weisen dieselben Gesetzmäßigkeiten auf und weitgehend analoge wie die entsprechenden Operatoren $C_{-\alpha}$ und C_α, wobei allerdings das Gleichheitszeichen weniger häufig auftritt.

B. Monotonierelationen

(3.5) Aus $\alpha > \beta$ folgt $H_\alpha(A) \supseteq H_\beta(A)$

(3.5)* Aus $\alpha > \beta$ folgt $H_{-\alpha}(A) \subseteq H_{-\beta}(A)$

(3.6) Aus $A \supset B$ folgt $H_\alpha(A) \supseteq H_\alpha(B)$

(3.6)* Aus $A \supset B$ folgt $H_{-\alpha}(A) \supseteq H_{-\alpha}(B)$

(3.5) und (3.5)* sind identisch mit (2.18), (2.18)*; (3.6), (3.6)* ergeben sich aus (2.9), (2.9)*. Aus $A \supset B$ folgt nämlich $C_\alpha(A) \supseteq C_\alpha(B)$, somit $C_{-\alpha} C_\alpha(A) \supseteq C_{-\alpha} C_\alpha(B)$, d. h. $H_\alpha(A) \supseteq H_\alpha(B)$. Der Beweis von (3.6)* ist analog.

Bedeutet A an dieser Stelle ausnahmsweise eine beliebige, nicht unbedingt abgeschlossene Menge, so gilt entsprechend (2.10) und (2.10)*: Durch Hinzufügen von Randpunkten wird die äußere α-Hülle, durch Wegnahme von Randpunkten die innere α-Hülle nicht verändert. Insbesondere gilt:

(3.7) $$H_\alpha(\bar{A}) = H_\alpha(A)$$

(3.7)* $$H_{-\alpha}(\underline{A}) = H_{-\alpha}(A).$$

(3.7) folgt aus (2.10) durch Anwendung des Operators $C_{-\alpha}$, (3.7)* aus (2.10)* durch Anwendung des Operators C_α.

C. Beziehungen zwischen den Operatoren H_α und $H_{-\alpha}$

(3.8) $$H_{-\alpha}(A) = K H_\alpha K(A)$$

(3.8)* $$H_\alpha(A) = K H_{-\alpha} K(A)$$

Beweis: $H_{-\alpha}(A) = C_\alpha C_{-\alpha}(A) = K K C_\alpha K C_\alpha K(A) = K C_{-\alpha} C_\alpha K(A) = K H_\alpha K(A)$.

Analog beweist man (3.8)*. Einfacher aus (3.8) durch den Übergang $A \to K(A)$.

(3.9) $$H_\alpha(A) = H_{-\alpha}(A) + H_\alpha G(A)$$

(3.10.1), (3.10.2), (3.10.3) $$H_\alpha(A) - H_{-\alpha}(A) = H_\alpha(A) H_\alpha(A^*) = \dot{H}_\alpha(A) + \dot{H}_\alpha(A^*) = H_\alpha G(A).$$

Beweis: Wir beweisen zuerst, daß $H_\alpha(A) - H_{-\alpha}(A) = H_\alpha G(A)$. Nach (2.22)** ist $C_{-\alpha}(A) - C_\alpha(B) = C_{-\alpha}(A - B)$. Setzt man hierin anstelle von A die Menge $C_\alpha(A)$ und für B die Menge $C_{-\alpha}(A)$, so erhält man im Hinblick auf (2.12): $C_{-\alpha} C_\alpha(A) - C_\alpha C_{-\alpha}(A) = C_{-\alpha}[C_\alpha(A) - C_{-\alpha}(A)] = C_{-\alpha} C_\alpha G(A)$, d. h. $H_\alpha(A) - H_{-\alpha}(A) = H_\alpha G(A)$.

[Weiter sind $H_{-\alpha}(A)$ und $H_\alpha G(A)$ fremd; denn im Hinblick auf (3.8) und (3.7) ist $H_{-\alpha}(A) = K H_\alpha K(A) = K H_\alpha(A^*) = K H_\alpha(\bar{A}^*)$. Nun ist wegen $\bar{A}^* \supseteq G(A)$ nach (3.6) $H_\alpha(\bar{A}^*) \supseteq H_\alpha G(A)$, somit sind $K H_\alpha(\bar{A}^*) = H_{-\alpha}(A)$ und $H_\alpha G(A)$ fremd.]

Wir addieren nun in der bewiesenen Gleichung $H_{-\alpha}(A)$ und erhalten unter Beachtung von (1.14) und $H_\alpha(A) \supseteq H_{-\alpha}(A)$: $H_\alpha(A) - H_{-\alpha}(A) + H_{-\alpha}(A) = H_\alpha(A) + H_{-\alpha}(A) = H_\alpha(A) = H_{-\alpha}(A) + H_\alpha G(A)$, womit die erste Gleichung bewiesen ist.

Weiter ist $H_\alpha(A) - H_{-\alpha}(A) = H_\alpha(A) K H_{-\alpha}(A) = H_\alpha(A) K H_{-\alpha} K K(A) = H_\alpha(A) H_\alpha(A^*)$.

Schließlich wird die Gleichung $H_\alpha(A) \cdot H_\alpha(A^*) = \dot{H}_\alpha(A) + \dot{H}_\alpha(A^*)$ in genau derselben Weise bewiesen, wie man (2.14) aus (2.13) gewonnen hat.

D. Verhalten bei Iteration

(3.11) $$H_\alpha H_\beta(A) \subseteq H_{\alpha+\beta}(A)$$

(3.11)* $$H_{-\alpha} H_{-\beta}(A) \supseteq H_{-(\alpha+\beta)}(A)$$

Beweis: Unter Berücksichtigung von (2.20), (2.15), (2.15)* ergibt sich (3.11) wie folgt: $H_\alpha H_\beta(A) = C_{-\alpha} C_\alpha C_{-\beta} C_\beta(A) \subseteq$

$C_{-\alpha} C_{-\beta} C_{\alpha} C_{\beta}(A) = C_{-(\alpha+\beta)} C_{\alpha+\beta}(A) = H_{\alpha+\beta}(A)$. — Durch den Übergang $A \to K(A)$ folgt (3.11)* aus (3.11) unter Beachtung von (3.8)*, (1.8).

Man beachte, daß aber im allgemeinen für die Operatoren H_{α} und $H_{-\alpha}$ die (2.16), (2.16)*, (2.18) und (2.18)* entsprechenden Relationen nicht gelten. Hier liegt also der Hauptgrund für den wesentlich geringeren Relationenreichtum der Operatoren H_{α} und $H_{-\alpha}$ gegenüber C_{α} und $C_{-\alpha}$.

E. Verhalten bei Mengenverknüpfungen

(3.12) $$H_{\alpha}(A+B) \supseteq H_{\alpha}(A) + H_{\alpha}(B)$$

(3.12)* $$H_{-\alpha}(A+B) \supseteq H_{-\alpha}(A) + H_{-\alpha}(B)$$

(3.13) $$H_{\alpha}(A\,B) \subseteq H_{\alpha}(A)\,H_{\alpha}(B)$$

(3.13)* $$H_{-\alpha}(A\,B) \subseteq H_{-\alpha}(A)\,H_{-\alpha}(B)$$

(3.14) $$H_{\alpha}(A-B) \subseteq H_{\alpha}(A) - H_{-\alpha}(B)$$

(3.14)* $$H_{-\alpha}(A-B) \subseteq H_{-\alpha}(A) - H_{\alpha}(B)$$

Beweis: Aus (3.6) folgt $H_{\alpha}(A+B) \supseteq H_{\alpha}(A)$, ebenso $H_{\alpha}(A+B) \supseteq H_{\alpha}(B)$, hieraus durch Addition $H_{\alpha}(A+B) \supseteq H_{\alpha}(A) + H_{\alpha}(B)$, womit (3.12) bewiesen ist. In gleicher Weise beweist man (3.12)*. (3.13) folgt aus (3.12)*, (3.13)* aus (3.12) durch die Übergänge $A \to K(A)$, $B \to K(B)$, (3.14) aus (3.13) und (3.14)* aus (3.13)* durch den Übergang $B \to K(B)$.

§ 4. Lote

In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften von Loten, gefällt von einem Punkte P auf eine Menge A untersucht werden, da zwischen der Menge dieser Lote der Länge α und der Parallelmenge $C_{\alpha}(A)$ enge Beziehungen bestehen. Von diesen Eigenschaften werden wir zum großen Teil im nächsten Paragraphen Gebrauch machen.

A. Definitionen und Bezeichnungen

(4.1) Es sei P ein Punkt von $K(A)$, X ein variabler Punkt in A. Unter dem Abstand $\alpha = \alpha(P, A)$ des Punktes P von der Menge A verstehen wir dann, wie üblich, die untere Grenze der Abstände $\overline{PX}$, wenn X alle Punkte von A durchläuft: $\alpha(P, A) = \text{fin. inf. } \overline{PX}\ (X \in A)$.

(4.2) Wenn, wie abgemacht, A abgeschlossen ist, so existiert mindestens ein Punkt $Q \in A$, der dann Randpunkt von A ist, für welchen gilt $\alpha(P, A) = \overline{PQ}$. Man sagt, der Abstand $\alpha(P, A)$ des Punktes P von der Menge A werde für mindestens einen Punkt $Q \in A$ angenommen. Die Strecke $\overline{PQ}$ heißt dann Lot von P auf A.

(4.3) Der Punkt P, von dem aus das Lot $\overline{PQ}$ gefällt wird, nennen wir Aufpunkt, das andere Ende Fußpunkt des Lotes.

Gelegentlich ist die Menge, auf welche wir ein Lot fällen, nicht abgeschlossen, sondern zum Beispiel offen, wie etwa die Menge $C_\alpha(A)$. Der Abstand $\alpha(P, A)$ des Punktes P von A existiert auch jetzt noch, es existiert aber nicht immer (bei offenen Mengen überhaupt nie) ein Punkt Q der Menge, für welche der Abstand $\alpha(P, A)$ angenommen wird. Um auch jetzt noch zu einem bestimmten Fußpunkt zu kommen, denken wir uns zunächst das Lot $\overline{PQ}$ auf die abgeschlossene Hülle der Menge gefällt und nennen dieses zugleich Lot auf die ursprüngliche Menge. Der Name Lot ist auch jetzt noch gerechtfertigt, denn man sieht leicht, daß es keinen Punkt S der ursprünglichen Menge gibt mit $\overline{PS} < \overline{PQ}$.

(4.4) Über die Zugehörigkeit der Lotendpunkte zum Lot treffen wir folgende Abmachung: Der Aufpunkt gehört nie, der Fußpunkt dann zum Lot, wenn er nicht zur Menge gehört. Demnach sind insbesondere alle Lote auf abgeschlossene Mengen beidseitig offen, alle Lote auf offene Mengen einseitig offen zu nehmen.

(4.5) Wird der Abstand $\alpha(P, A)$ für genau einen Punkt Q von A angenommen, so heißt das Lot $\overline{PQ}$ eindeutig (einzig)

und P ein gewöhnlicher Punkt. Existieren von P auf A mindestens zwei voneinander verschiedene Lote, so heiße jedes dieser Lote ein mehrdeutiges Lot und P ein Verzweigungspunkt.

Daß $\overline{PQ} = \alpha$ Lot auf die abgeschlossene Menge A ist, läßt sich durch folgende Beziehung ausdrücken:

(4.6) $$\bar{C}_\alpha(P)\,A \supseteq Q \supset C_\alpha(P)\,A = 0.$$

Das heißt die Kugel $C_\alpha(P)$ vom Zentrum P und Radius α enthält auf ihrem Rand mindestens einen, im Innern aber keinen Punkt von A.

Insbesondere ist charakteristisch für die Eindeutigkeit eines Lotes $\overline{PQ} = \alpha$ auf A:

(4.7) $$\bar{C}_\alpha(P)\,A = Q \supset C_\alpha(P)\,A = 0.$$

Das heißt die Kugel $C_\alpha(P)$ enthält im Innern keinen, auf dem Rand genau einen Punkt Q von A.

Endlich ist die Mehrdeutigkeit eines Lotes $\overline{PQ} = \alpha$ ausgedrückt durch die Beziehung:

(4.8) $$\bar{C}_\alpha(P)\,A \supset Q \supset C_\alpha(P)\,A = 0.$$

Die Kugel $C_\alpha(P)$ enthält hier auf ihrem Rand außer Q noch mindestens einen andern Punkt von A, aber keinen im Innern.

(4.9) Die offene Kugel $C_\alpha(P)$ in diesen Beziehungen nennen wir α-Stützkugel von A, die Strecke $\overline{PQ}$ Stützradius, Q Stützpunkt. Die Begriffe Stützradius und Lot sind demnach gleichbedeutend, ebenso Stützpunkt und Lotfußpunkt. Weil aber jeder dieser Ausdrücke, auch in vielen der folgenden Sätze, anschaulich etwas andere Vorstellungen weckt als der entsprechende andere Ausdruck, so seien hier jeweilen beide Ausdrücke nebeneinander gebraucht.

(4.10) Ein Lot $\overline{PQ}$ auf A heiße beliebig verkürzbar, wenn mit $\overline{PQ}$ auch $\overline{P'Q}$ Lot auf A ist, wobei P' ein beliebiger innerer Punkt von $\overline{PQ}$ bedeutet.

(4.11) Ein Lot $\overline{PQ}$ auf A heiße verlängerbar, wenn auf der

P-seitigen Verlängerung von $\overline{PQ}$ ein Punkt P' existiert, so daß $\overline{P'Q}$ wiederum Lot auf A ist.

(4.12) R sei ein Randpunkt von A, s eine in R beginnende Halbgerade (Strahl). s heiße unendlich langes Lot (oder Lotstrahl) auf A, wenn für jeden Punkt P auf s $\overline{PR}$ Lot auf A ist.

(4.13) Denken wir uns von irgendeinem Punkte $P \in K C_\alpha(A)$ ein Lot $\overline{PQ}$ auf $C_\alpha(A)$ gefällt und vom Fußpunkte Q dieses Lotes ein Lot $\overline{QR}$ auf $C_{\alpha'}(A)$ $(0 \leqq \alpha' < \alpha)$. Die Vereinigungsmenge dieser beiden Lote $\overline{PQ}$ und $\overline{QR}$ nennen wir kurz eine Lotkette.

B. Verkürzbarkeit und Verlängerbarkeit von Loten

(4.14) Jedes Lot ist beliebig verkürzbar und das verkürzte Lot ist eindeutig[7]).

Beweis: Sei $\overline{PQ}$ ein Lot auf A und P' ein innerer Punkt von $\overline{PQ}$. Würde nun ein Randpunkt $Q' \neq Q$ existieren mit $\overline{P'Q'} \leqq \overline{P'Q}$, so wäre $\overline{PQ'} < \overline{PP'} + \overline{P'Q'} \leqq \overline{PP'} + \overline{P'Q} = \overline{PQ}$, also $\overline{PQ'} < \overline{PQ}$, was unmöglich ist, denn $\overline{PQ}$ ist Lot auf A.

(4.14) läßt sich mit Hilfe der Ausdrücke Stützkugel, Stützradius, Stützpunkt natürlich auch so fassen:

Ist $C_\alpha(P)$ eine Stützkugel von A mit Zentrum P und einem Stützpunkt Q, und ist P' ein innerer Punkt des Stützradius $\overline{PQ} = \alpha$, so ist $C_{\alpha'}(P)\,(\overline{P'Q} = \alpha')$ wiederum Stützkugel von A mit dem einzigen Stützpunkt Q.

Entsprechend ließen sich viele der folgenden Sätze umformulieren.

(4.15) Ein nicht-eindeutiges Lot ist nicht verlängerbar[7]).

Wären nämlich $\overline{PQ}$ und $\overline{PR} = \overline{PQ}\,(R \neq Q)$ zwei verschiedene Lote von P auf A und (etwa) $\overline{PQ}$ bis zu einem Punkte S verlängerbar, dann wäre $\overline{PQ}$ Verkürzung des Lotes $\overline{SQ}$ und müßte nach (4.14) einziges Lot von P auf A sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Die Umkehrung von (4.15): „Ist ein Lot $\overline{PQ}$ auf A nicht

---

[7]) *Bouligand* [1], p. 93, Nr. 91a, b.

verlängerbar, so ist es nicht-eindeutiges Lot auf A", oder, was logisch dasselbe bedeutet, „ist ein Lot $\overline{PQ}$ auf A einziges Lot von P auf A, so ist es verlängerbar", ist falsch. Als Gegenbeispiel nehme man etwa den Berührungsradius $\overline{PQ} = \alpha$ des Krümmungskreises $C_\alpha(P)$, z. B. im Scheitel Q einer Parabel A.

Dagegen gilt der folgende, recht tief liegende Satz von *Motzkin*[8]), der als eine schwächere Fassung der vorigen, als falsch erkannten Umkehrung von (4.15) aufzufassen ist:

(4.16) Ist ein Lot PQ gefällt auf eine Menge A nicht verlängerbar, so kann es zwar eindeutig sein, aber in jeder Umgebung von P existiert ein Punkt P', von dem aus das Lot $\overline{P'R'}$ gefällt auf A nicht eindeutig ist.

Als Illustrationsbeispiel zu diesem Satze nehme man etwa das eben erwähnte.

C. Undurchdringlichkeit der Lote

(Es sei hier daran erinnert, daß A abgeschlossen ist und deshalb die Lote gefällt auf A nach den Abmachungen beidseitig offen zu nehmen sind.)

(4.17) Zwei Lote, gefällt auf dieselbe Menge A, die nicht in dieselbe Gerade fallen, können keinen Punkt gemein haben. Auch kann ein innerer Punkt des einen Lotes nicht mit einem Endpunkt des andern zusammenfallen[9]).

Beweis: Angenommen es existiere ein Punkt S, der zugleich Punkt eines Lotes $\overline{PQ}$ und innerer oder Endpunkt ($S = P'$) eines Lotes $\overline{P'Q'}$ ist, wobei $P'\overline{Q'}$ nicht mit $\overline{PQ}$ in dieselbe Gerade falle ($Q \neq Q'$). Dann ist $\overline{SQ}$ Verkürzung des Lotes $\overline{PQ}$ und als solches nach (4.14) eindeutiges Lot von S auf A. Ebenfalls nach (4.14) (oder, wenn $S = P'$, nach Voraussetzung) ist aber auch $\overline{SQ'}$ Lot auf A, was der Eindeutigkeit des Lotes $\overline{SQ}$ widerspricht.

Satz (4.17) läßt sich in folgender Weise erweitern:

(4.18) Bedeutet $1(P)$ die Punktmenge gebildet aus allen Loten

[8]) *Motzkin Th.* [1].

[9]) *Bouligand* [1], p. 93, Nr. 91c.

gefällt von P auf A und $\mathfrak{l}(Q)$ die entsprechende Punktmenge für den Punkt $Q \neq P$ und sind beide Lote gleich lang, so haben die konvexe Hülle von $\overline{\mathfrak{l}}(P)$ und diejenige von $\overline{\mathfrak{l}}(Q)$ höchstens Randpunkte gemein[10]).

Beweis: Wir denken uns zu $\overline{PQ}$ die $(n-1)$-dimensionale, mittelsenkrechte Hyperebene M gelegt, also die Gesamtheit der Punkte X, die der Gleichung $\overline{PX} = \overline{QX}$ genügen. $\overline{PR}$ sei ein beliebiges Lot aus $\mathfrak{l}(P)$, $\overline{QS}$ ein ebensolches aus $\mathfrak{l}(Q)$. Dann ist $\overline{PR} \leqq \overline{QR}$ und $\overline{QS} \leqq \overline{PS}$. Es liegt also R mit P im P-seitigen abgeschlossenen Halbraum $\overline{H}(P)$ erzeugt durch M und wegen der Konvexität von $\overline{H}(P)$ die ganze Strecke $\overline{PR}$. Ebenso liegt die abgeschlossene Strecke $\overline{QS}$ ganz in $\overline{H}(Q)$. Verbinden wir nun alle möglichen Punkte Y und Z aus $\overline{\mathfrak{l}}(P)$, so gehört wegen der Konvexität von $\overline{H}(P)$ mit Y und Z auch $\overline{YZ}$ zu $\overline{H}(P)$. In der so durch Ziehen von Sehnen erhaltenen Menge verbinden wir wieder alle möglichen Punkte Y', Z', und wieder gehört mit Y' und Z' auch $\overline{Y'Z'}$ zu $\overline{H}(P)$. Fährt man so weiter, so gelangt man aber[11]) (nach endlich vielen Schritten) zur konvexen Hülle von $\overline{\mathfrak{l}}(P)$, die somit ganz in $\overline{H}(P)$ liegt. Ebenso liegt die konvexe Hülle von $\overline{\mathfrak{l}}(Q)$ ganz in $\overline{H}(Q)$. $\overline{\mathfrak{l}}(P)$ und $\overline{\mathfrak{l}}(Q)$ können also höchstens Randpunkte gemein haben.

D. Sätze vermischten Inhalts

(4.19) Die Menge der α-Stützkugelzentren von A ist identisch mit dem Rand $GC_\alpha(A)$ von $C_\alpha(A)$[12]).

Diese Aussage wäre nicht allgemein richtig, wenn $C_\alpha(A)$ die Vereinigungsmenge abgeschlossener, statt offener Kugeln wäre. Als Gegenbeispiel wähle man etwa für A eine Hohlkugel vom inneren Radius r. Das Zentrum M wäre dann für $\alpha = r$ Zentrum einer α-Stützkugel, aber kein Randpunkt, sondern innerer Punkt von $C_\alpha(A)$.

---

[10]) Vgl. hiezu auch *Durand* [1], p. 382, Nr. 66, 67.

[11]) *Bonnesen-Fenchel* [1], p. 10, Nr. 7.

[11]) *Durand* [1], p. 345, Nr. 13.

(4.20) Sind $\overline{PR}$ und $\overline{QS}$ beliebige Lote auf A, so ist der Winkel gebildet durch die Vektoren $\vec{PQ}$ und $\vec{RS}$ (die entsprechende Lotendpunkte in entsprechender Reihenfolge verbinden) höchstens $\frac{\pi}{2}$, d. h. $\vec{PQ} \cdot \vec{RS} \geqq 0$.

Wir legen die mittelsenkrechte Ebene M zu RS. Wegen $\overline{PR} \leqq \overline{PS}$ liegt P im R-seitigen abgeschlossenen Halbraum $H(R)$, wegen $\overline{QS} \leqq \overline{QR}$ Q im S-seitigen abgeschlossenen Halbraum $H(Q)$, erzeugt durch M. Der Vektor $\vec{PQ}$ durchsticht also die Hyperebene M und weist in denselben Halbraum $H(S)$ wie der Vektor $\vec{RS}$, oder es liegt doch seine Spitze Q in M, eventuell überhaupt der ganze Vektor $\vec{PQ}$. In allen Fällen leuchtet ein, daß dann der Winkel, gebildet durch die Vektoren $\vec{PQ}$ und $\vec{RS}$, niemals größer sein kann als $\frac{\pi}{2}$. $\frac{\pi}{2}$ wird erreicht, wenn $\overline{PQ}$ in M liegt. — Nach diesem Hinweis, der die anschauliche Bedeutung von (4.20) klarstellt, der analytisch geführte

Beweis: Setzen wir $\vec{PR} = \mathfrak{a}$, $\vec{QS} = \mathfrak{a}'$, $\vec{RS} = \mathfrak{b}$, $\vec{PQ} = \mathfrak{b}'$, so gilt, weil $\overline{PR}$ und $\overline{QS}$ Lote auf A sind: $\overline{PS} \geqq \overline{PR}$, also $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 \geqq \mathfrak{a}^2$ (1), $\overline{QR} \geqq \overline{QS}$, oder $(\mathfrak{a}'-\mathfrak{b})^2 \geqq \mathfrak{a}'^2$ (2). Durch Addition von (1) und (2) erhält man $\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}'^2 - 2\mathfrak{a}'\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 \geqq \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}'^2$ oder $(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')\mathfrak{b} \geqq -\mathfrak{b}^2$. Weil aber $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, somit $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}' = \mathfrak{b}' - \mathfrak{b}$ ist, kann man die letzte Ungleichung auch so schreiben $(\mathfrak{b}' - \mathfrak{b})\mathfrak{b} \geqq -\mathfrak{b}^2$, woraus folgt $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \geqq 0$, w. z. b. w.

E. Lotketten

(4.21) Ist $\overline{PR}$ Lot auf A und $\overline{QR}$ Lot auf $K(A)$, so liegen P, R und Q in einer Geraden.

Beweis: Es ist $\overline{PQ} \leqq \overline{PR} + \overline{QR}$ (1). Ferner existiert auf $\overline{PQ}$, weil $P \in A$ und $Q \in K(A)$, ein Randpunkt R' von A. Es ist dann $\overline{PR'} \geqq \overline{PR}$, weil $\overline{PR}$ Lot auf A, und $\overline{QR'} \geqq \overline{QR}$, weil $\overline{QR}$ Lot auf $K(A)$ ist. Somit ist $\overline{PR'} + \overline{QR'} = \overline{PQ} \geqq \overline{PR} + \overline{QR}$ (2). Aus (1) und (2) folgt $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{QR}$, somit liegt R auf $\overline{PQ}$.

Diesen Satz benützen wir zum Beweis des folgenden Satzes über Lotketten:

(4.22) Lotketten liegen auf einer Geraden.

Beweis: Es sei $P \in K\overline{C}_\alpha(A)$, $\overline{PR}$ Lot auf $C_\alpha(A)$ und $\overline{RQ}$ Lot auf A. Da zufolge (4.19) R als Randpunkt von $C_\alpha(A)$ Zentrum einer α-Stützkugel von A ist, m. a. W. Aufpunkt eines Lotes der Länge α, so folgt $\overline{RQ} = \alpha$. Dann muß aber auch $\overline{QR} = \alpha$ Lot auf $K C_\alpha(A)$ sein, denn $Q \in A$ hat von jedem Punkte $X \in K C_\alpha(A)$ einen Abstand $\overline{QX} \geqq \alpha$. Somit folgt aus (4.21), wenn man dort anstelle von A die Menge $C_\alpha(A)$ setzt, daß P, Q und R in einer Geraden liegen.

(4.23) Ist P ein Punkt von $K\overline{C}_\alpha(A)$, $\overline{PR}$ Lot auf $C_\alpha(A)$ und $\overline{RQ}$ Lot auf A, so ist auch $\overline{PQ}$ Lot auf A.

Beweis: Q' sei ein Randpunkt von A und $Q' \neq Q$. Wegen $Q' \in A$ und $P \in K\overline{C}_\alpha(A)$ liegt im Innern von $\overline{PQ'}$ ein Randpunkt S von $C_\alpha(A)$. Weil $\overline{PR}$ Lot auf $C_\alpha(A)$ ist, so ist (1) $\overline{PS} \geqq \overline{PR}$, weil $\overline{RQ} = \alpha$ Lot auf A ist, so folgt (2) $\overline{SQ'} \geqq \overline{RQ} = \alpha$. Aus (1) und (2) ergibt sich $\overline{PS} + \overline{SQ'} \geqq \overline{PR} + \overline{RQ}$, oder, weil nach (4.22) $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ}$ ist, $\overline{PQ'} > \overline{PQ}$, d. h. $\overline{PQ}$ ist Lot auf A.

(4.24) Ist $\overline{PQ} > \alpha$ Lot auf A und R Randpunkt von $C_\alpha(A)$ auf $\overline{PQ}$, so ist $\overline{PR}$ Lot auf $C_\alpha(A)$.

Beweis: $R' \neq R$ sei ein Randpunkt von $C_\alpha(A)$, $\overline{R'Q'} = \alpha$ Lot von R' auf A. Weil $\overline{PQ}$ Lot auf A ist, so ist $\overline{PQ} \leqq \overline{PQ'}$ und nach (4.14) auch $\overline{RQ} = \alpha$ Lot auf A. Es folgt somit: $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ} \leqq \overline{PQ'} \leqq \overline{PR'} + \overline{R'Q'}$, also (wegen $\overline{RQ} = \overline{R'Q'}$) $\overline{PR} \leqq \overline{PR'}$. Das heißt aber $\overline{PR}$ ist Lot auf $C_\alpha(A)$.

(4.23) und (4.24) zusammenfassend können wir sagen:

(4.25) Ist P ein Punkt von $K\overline{C}_\alpha(A)$, so ist jeder von P ausgehende Strahl, der Träger eines Lotes gefällt auf A ist, auch Träger eines Lotes auf $C_\alpha(A)$ und umgekehrt.

§ 5. Die Operatoren L_α und $L_{-\alpha}$

A. Definitionen und Bezeichnungen

(5.1) Unter der α-Lotmenge $\dot{L}_\alpha(A)$ von A verstehen wir die Punktmenge, die durch die Vereinigung der Lote der

Länge α gefällt auf A entsteht. — $\dot{L}_\alpha(A)$ und A sind nach (4.4) punktfremd.

(5.2) Die Vereinigungsmenge von $\dot{L}_\alpha(A)$ mit A bezeichnen wir mit $L_\alpha(A)$. Es ist also $L_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha(A) + A$. Umgekehrt ist $\dot{L}_\alpha(A) = L_\alpha(A) - A = L_\alpha(A)\,K(A)$.

(5.3) Schließlich ist unter $\dot{L}_{-\alpha}(A)$ die Menge $\dot{L}_\alpha(A^*)$, unter $L_{-\alpha}(A)$ die Menge $K\,L_\alpha\,K(A)$ zu verstehen.

(5.4) Für die nach Voraussetzung abgeschlossene Menge A setzen wir $L_0(A) = A$ und $\dot{L}_0(A) = 0$. — Wenn A eine nicht abgeschlossene Menge wäre, wo würden wir $L_0(A)$ mit der abgeschlossenen Hülle von A identifizieren, also setzen $L_0(A) = \bar{A}$. Unter $\dot{L}_0(A)$ verstehen wir dann die Randmenge von A, die nicht zu A gehört. Es ist auch jetzt noch $L_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha(A) + A$. — Im folgenden setzen wir aber den Parameter α (β etc.) stets positiv voraus. Der Leser mag sich überzeugen, daß die meisten der folgenden Sätze auch noch gelten, wenn der Parameter α (β etc.) gleich null ist.

(5.5) Weiter setzen wir für die leere Menge 0 und den ganzen Raum R_n: $L_\alpha(0) = \dot{L}_\alpha(0) = 0$, $L_\alpha(R_n) = R_n$, woraus formal folgt, daß man zu setzen hat $L_{-\alpha}(0) = 0$ und $L_{-\alpha}(R_n) = R_n$.

Wir wollen nun untersuchen, was für allgemeine Operationsregeln für L_α und $\dot{L}_\alpha$ noch gelten. Wir werden sehen, daß hier die allgemein gültigen Operationsregeln zu einem kleinen Rest zusammenschrumpfen. — Alsdann werden die Beziehungen der Operatoren L_α und $\dot{L}_\alpha$ zu C_α und $\dot{C}_\alpha$ studiert.

B. Beziehungen zwischen den Operatoren L_α und $L_{-\alpha}$

Es gelten folgende (2.12), (2.13), (2.14) bzw. (3.9), (3.10) entsprechende Relationen:

(5.6) $$L_\alpha(A) = L_{-\alpha}(A) + L_\alpha\,G(A)$$

(5.7.1), (5.7.2) $$L_\alpha(A) - L_{-\alpha}(A) = L_\alpha(A)\,L_\alpha(A^*) = \\ = \dot{L}_\alpha(A) + \dot{L}_\alpha(A^*)$$

(5.8.1), (5.8.2), (5.8.3) $L_\alpha(A) - L_{-\alpha}(\underline{A}) = L_\alpha(A)\, L_\alpha(\bar{A}^*) =$
$= \dot{L}_\alpha(A) + \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) + G(A) = L_\alpha G(A).$

Beweis: Wir beweisen zuerst (5.8.3). Weil $L_\alpha G(A) = \dot{L}_\alpha G(A) + G(A)$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\dot{L}_\alpha(A) + \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) = \dot{L}_\alpha G(A)$.

a) $\dot{L}_\alpha(A) + \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) \supseteq \dot{L}_\alpha G(A)$: Es sei $\overline{PQ} = \alpha$ ein Lot $\in \dot{L}_\alpha G(A)$. Dann ist zu zeigen, daß $\overline{PQ}$ entweder Lot auf A oder auf $\bar{A}^*$ ist. Beachten wir zunächst, daß alle Lote auf die drei Mengen $A, \bar{A}^*$ und $G(A)$, wegen der Abgeschlossenheit dieser Mengen, beidseitig offen sind. Wir brauchen uns also um die Zugehörigkeit der Lotfußpunkte zu unseren drei Mengen nicht zu kümmern. Ist nun 1. $P \in A^*$, so ist $\overline{PQ}$ Lot auf A: Wegen der Abgeschlossenheit von A ist jedenfalls $Q \in G(A) \subseteq A$. Zu zeigen ist, daß für einen beliebigen Punkt $Q' \in A$ gilt $\overline{PQ'} \geqq \overline{PQ}$. Auf $\overline{PQ'}$ liegt ein Punkt R von $G(A)$. Weil $\overline{PQ}$ Lot auf $G(A)$ ist, gilt $\overline{PR} \geqq \overline{PQ}$, also erst recht $\overline{PQ'} \geqq \overline{PQ}$. — Ist aber 2. $P \in A$, so zeigt man in gleicher Weise, daß $\overline{PQ} \in \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*)$ ist.

b) $\dot{L}_\alpha(A) + \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) \subseteq \dot{L}_\alpha G(A)$: Es sei 1. $\overline{PQ}$ ein α-Lot auf A. Wir behaupten $\overline{PQ}$ ist dann auch Lot auf $G(A)$. Jedenfalls ist $Q \in G(A)$. Zu zeigen ist, daß für einen beliebigen Punkt $Q' \in G(A)$ gilt $\overline{PQ'} \geqq \overline{PQ}$. Gäbe es einen Punkt $Q' \in G(A)$, der wegen $A = \bar{A}$ auch zu A gehört, mit $\overline{PQ'} < \overline{PQ}$, so wäre ja $\overline{PQ}$ nicht Lot auf A, entgegen der Voraussetzung. Es ist also $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\alpha G(A)$. Ersetzt man hierin A durch $\bar{A}^*$, so folgt auch $\dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) \subseteq \dot{L}_\alpha G(\bar{A}^*) = \dot{L}_\alpha G(A)$, womit b) bewiesen ist.

Nun beweisen wir (5.8.1), (5.8.2). Es ist
$L_\alpha(A) - L_{-\alpha}(\underline{A}) = L_\alpha(A)\, K K\, L_\alpha K(\underline{A}) = L_\alpha(A)\, L_\alpha(\bar{A}^*) =$
$[\dot{L}_\alpha(A) + A][\dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) + \bar{A}^*] = \dot{L}_\alpha(A)\, \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) + \dot{L}_\alpha(A)\, \bar{A}^* +$
$A\, \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) + A\, \bar{A}^*$. Das letzte Glied $A\, \bar{A}^*$ ist $G(A)$, ferner kann man wegen $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \bar{A}^*$ und $\dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) \subseteq A$ für die beiden Mittelglieder auch schreiben $\dot{L}_\alpha(A)$ und $\dot{L}_\alpha(\bar{A}^*)$; dann sieht man aber, daß das erste Glied $\dot{L}_\alpha(A)\, \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*)$ in diesen enthalten ist, so daß man alle vier Glieder ersetzen kann durch $\dot{L}_\alpha(A) + \dot{L}_\alpha(\bar{A}^*) + G(A)$.

Analog beweist man (5.7.1), (5.7.2).

Gleichung (5.6) schließlich können wir im Hinblick auf (5.8.3) auch schreiben $\dot{L}_\alpha(A)+A=L_{-\alpha}(A)+\dot{L}_\alpha(\overline{A}^*)+\dot{L}_\alpha(A)+G(A) = L_{-\alpha}(A)+\dot{L}_\alpha(A^*)+\dot{L}_\alpha(A)+G(A)$. $L_{-\alpha}(A)=K\,L_\alpha\,K\,(A)$ ist die Menge aller Punkte, die weder in $K(A)=A^*$ noch in $\dot{L}_\alpha(A^*)$, d. h. auf Loten gefällt auf A^* liegen, muß somit die Teilmenge der Punkte von A sein, die nicht auf Loten gefällt auf A^* liegen, mit $\dot{L}_\alpha(A^*)$ vereinigt gibt sie somit A. Die Gleichung (5.6) kann also nun so geschrieben werden: $\dot{L}_\alpha(A)+A=A+\dot{L}_\alpha(A)+G(A)$. Die Richtigkeit dieser Gleichung ist aber wegen der Abgeschlossenheit von A evident.

C. Verhalten des *L*-Operators bei Mengenverknüpfungen

Allgemein Gültiges läßt sich hier nur über die Vereinigungsmenge von A und B aussagen. Es gelten hier die Beziehungen:

(5.9) $$\dot{L}_\alpha(A)+\dot{L}_\alpha(B)\supseteq\dot{L}_\alpha(A+B)$$

(5.10) $$L_\alpha(A)+L_\alpha(B)\supseteq L_\alpha(A+B).$$

Beweis: (5.9) besagt, daß jedes Lot der Länge α gefällt auf $A+B$ auch α-Lot auf A oder B ist, was aber im Hinblick auf die Definition des Lotes selbstverständlich ist. Durch Addition von $A+B$ erhält man (5.10).

Gilt das Gleichheitszeichen in (5.9), so auch in (5.10), aber nicht umgekehrt. Man denke z. B. an zwei gleich große Quadrate A und B, die eine Seite gemein haben.

D. Beziehung zwischen den *L*- und *C*-Operatoren

L-Mengen sind stets in den entsprechenden C-Mengen enthalten:

(5.11) $$\dot{L}_\alpha(A)\subseteq\dot{C}_\alpha(A)$$

(5.12) $$L_\alpha(A)\subseteq C_\alpha(A)$$

(5.13) $$\overline{L}_\alpha(A)\subseteq\overline{C}_\alpha(A)$$

Beweis: Ist nämlich P' ein Punkt auf einem Lot $\overline{PQ}\in\dot{L}_\alpha(A)$,

so ist wegen $\overline{QP'} < \alpha$ $P' \in C_\alpha(Q) \in C_\alpha(A)$. Weil ferner $P' \in K(A)$, so ist $P' \in C_\alpha(A) K(A) = \dot{C}_\alpha(A)$. — Durch Addition von A folgt (5.12). — Zu (5.13): Nach (5.12) ist $L_\alpha(A) \subseteq C_\alpha(A)$. Deshalb genügt es noch zu zeigen, daß $G L_\alpha(A) \subseteq \overline{C}_\alpha(A)$ ist. In der Tat: Ein Punkt $P' \in G L_\alpha(A)$ ist wegen $G L_\alpha(A) = G[\dot{L}_\alpha(A) + G(A)] \subseteq G \dot{L}_\alpha(A) + G(A)$ (vgl. (1.19)) entweder Randpunkt von A, innerer Punkt eines Lotes $P\overline{Q} = \alpha$ auf A, oder Aufpunkt eines solchen Lotes. Im ersten Falle ist, weil A abgeschlossen, $P' \in A$, im zweiten Falle, wegen $\overline{P'Q} < \overline{PQ} = \alpha$, $P' \in C_\alpha(Q) \subseteq C_\alpha(A)$, im dritten Falle nach (4.19) $P' \in G C_\alpha(A)$, also in jedem Falle $P' \in \overline{C}_\alpha(A)$.

Die Aussage (5.11) läßt sich durch Einschieben anderer Mengen verfeinern. Es gelten stets folgende Beziehungen:

(5.14.1), (5.14.2), (5.14.3) $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) \subseteq \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A) \subseteq \dot{C}_\alpha(A)$

Beweis: Setzt man in (5.11) anstelle von A die Menge $K C_\alpha(A)$, so folgt (5.14.2). Ist ferner $\overline{PQ} = \alpha$ Lot auf A, so ist, wie schon im Beweise von (4.22) dargetan wurde, auch $\overline{QP}$ Lot auf $K C_\alpha(A)$, also $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$, womit (5.14.1) bewiesen ist. (5.14.3) schließlich ergibt sich aus der Relation $C_{-\alpha} C_\alpha(A) \supseteq A$; denn hieraus folgt $C_\alpha K C_\alpha(A) \subseteq K(A)$. Bilden wir den Durchschnitt dieser beiden Mengen mit $C_\alpha(A)$, so erhalten wir $C_\alpha K C_\alpha(A) C_\alpha(A) \subseteq C_\alpha(A) K(A)$, anders geschrieben $C_\alpha K C_\alpha(A) - K C_\alpha(A) \subseteq C_\alpha(A) - A$, d. h. (5.14.3).

Durch den wiederholten Übergang $A \to K C_\alpha(A)$ gewinnt man aus (5.14) folgende Kette von Beziehungen: $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\alpha (K C_\alpha)^2(A) \ldots \subseteq \ldots \dot{C}_\alpha (K C_\alpha)^2(A) \subseteq \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A) \subseteq \dot{C}_\alpha(A)$. Dabei bedeute $(K C_\alpha)^2(A)$ die Menge $K C_\alpha K C_\alpha(A)$ usw. Da nun aber zufolge (2.17)* $(K C_\alpha)^3(A) = K C_\alpha K C_\alpha K C_\alpha(A) = K C_\alpha C_{-\alpha} C_\alpha(A) = K C_\alpha(A)$ ist, so gilt vom zweiten Gliede an, sowohl beim Operator $\dot{L}$ wie beim Operator $\dot{C}$, das Gleichheitszeichen:

(5.15) $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha (K C_\alpha)^i(A) \subseteq \dot{C}_\alpha (K C_\alpha)^i(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A) \subseteq \dot{C}_\alpha(A)$ $(i = 2, 3, \ldots)$

Während nach (5.12) $L_\alpha(A)$ in $C_\alpha(A)$ enthalten ist, ist umgekehrt der Rand von $C_\alpha(A)$ im Rand von $L_\alpha(A)$ enthalten:

(5.16) $$G\,L_\alpha(A) \supseteq G\,C_\alpha(A)$$

Beweis: $GC_\alpha(A)$ ist nämlich nach (4.19) identisch mit der Menge der Aufpunkte P aller Lote $\overline{PQ}$ der Länge α gefällt auf A. Diese Lotenden müssen aber immer Randpunkte von $L_\alpha(A)$ sein; denn jede Umgebung von P enthält Punkte von $\overline{PQ}$ und damit von $L_\alpha(A)$. Ferner wegen $P \in K\,C_\alpha(A) \subseteq K\,L_\alpha(A)$ mindestens einen Punkt von $K\,L_\alpha(A)$, nämlich P selber. Somit ist $P \in G\,L_\alpha(A)$.

Im Gegensatz zu (5.16) gilt nicht etwa $G\dot{L}(A) \supseteq G\dot{C}_\alpha(A)$. Als Gegenbeispiel nehme man etwa ein Viereck mit einspringender Ecke.

(5.17) Nach (5.16) lassen sich die Randpunkte von $L_\alpha(A)$ in zwei Klassen einteilen, $G_1\,L_\alpha(A) = GC_\alpha(A)$, die den Rand von $C_\alpha(A)$ bilden und die wir äußere Randpunkte von $L_\alpha(A)$ nennen können, und die Menge der übrigen Randpunkte von $L_\alpha(A)$, die natürlich ganz in $C_\alpha(A)$ liegen. Diese Menge bezeichnen wir mit $G_2\,L_\alpha(A)$ und nennen sie die Menge der innern Randpunkte von $L_\alpha(A)$. Sie sind innere Punkte von α-Loten auf A oder bilden einen Teil des Randes von A. $G_1\,L_\alpha(A)$ und $G_2\,L_\alpha(A)$ sind fremd.

E. Verhalten des L-Operators bei Iteration. — Monotonieeigenschaften

Wir fällen nun auf eine Menge $L_\beta(A)$ alle Lote der Länge α. Über die Verteilung dieser Lote gilt:

(5.18) Die innern Punkte eines Lotes gefällt auf $L_\beta(A)$ liegen entweder alle in $K\,C_\beta(A)$ oder alle in $C_\beta(A)$.

Beweis: Angenommen es gäbe auf einem Lot $\overline{PQ}$ gefällt auf $L_\beta(A)$ zwei innere Punkte X und Y mit $X \in K\,C_\beta(A)$ und $Y \in C_\beta(A)$. Auf $\overline{XY}$ gibt es dann einen Punkt $R \in GC_\beta(A)$. Dieser ist nach (5.16) zugleich Randpunkt von $L_\beta(A)$. Dann könnte aber, wegen $\overline{PR} < \overline{PQ}$, $\overline{PQ}$ nicht

Lot auf $L_\beta(A)$ sein, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(5.19) Die α-Lote gefällt auf $L_\beta(A)$, deren Inneres ganz in $KC_\beta(A)$ liegt, bezeichnen wir mit $\dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A)$ und nennen sie äußere α-Lote gefällt auf $L_\beta(A)$. Ihre Fußpunkte bilden einen Teil des Randes von $C_\beta(A)$. — Die α-Lote auf $L_\beta(A)$, deren Inneres ganz in $C_\beta(A)$ liegt, bezeichnen wir mit $\dot{L}_\alpha{}^2 L_\beta(A)$ und nennen jedes Lot dieser Menge ein inneres α-Lot auf $L_\beta(A)$. Die Fußpunkte dieser Lote liegen entweder in $G(A)$ oder auf β-Loten gefällt auf A. Wir können schreiben:

(5.20) $$\dot{L}_\alpha L_\beta(A) = \dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A) + \dot{L}_\alpha{}^2 L_\beta(A)$$

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

Die Menge der äußeren α-Lote gefällt auf $L_\beta(A)$ ist identisch mit der Menge der α-Lote gefällt auf $C_\beta(A)$:

(5.21) $$\dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A) = \dot{L}_\alpha C_\beta(A)$$

Beweis: a) $\dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A) \supseteq \dot{L}_\alpha C_\beta(A)$: Es sei $\overline{PQ}$ ein α-Lot gefällt auf $C_\beta(A)$, also $\overline{PQ} \in \dot{L}_\alpha C_\beta(A)$. Nach (5.16) ist dann einerseits $Q \in G C_\beta(A) \subseteq G L_\beta(A)$, nach (5.12) anderseits $L_\beta(A) \subseteq C_\beta(A)$, so daß $\overline{PQ}$ auch Lot auf $L_\beta(A)$ sein muß, und zwar, wegen $\overline{PQ} \in \dot{L}_\alpha C_\beta(A) \subseteq K C_\beta(A)$, äußeres α-Lot. Dabei gehören die α-Lotfußpunkte bei der Menge $\dot{L}_\alpha C_\beta(A)$ alle zum α-Lot, denn $C_\beta(A)$ ist offen. Bei der Menge $\dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A)$ aber ebenfalls; die Fußpunkte Q der äußeren α-Lote gefällt auf $L_\beta(A)$ liegen nämlich auf $GC_\beta(A)$, weil die innern Punkte dieser α-Lote nach (5.18) und Definition (5.17) ganz zu $KC_\beta(A)$ gehören. $GC_\beta(A)$ besteht aber nach (4.19) aus den Aufpunkten der β-Lote gefällt auf A. Diese gehören gemäß Festsetzung (4.4) nicht zum β-Lot und damit nicht zu $L_\beta(A)$. Somit müssen sie, wiederum nach (4.4), zu $\dot{L}_\alpha L_\beta(A)$ gehören.

b) $\dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A) \subseteq \dot{L}_\alpha C_\beta(A)$: $\overline{PQ}$ sei äußeres α-Lot gefällt auf $L_\beta(A)$, also $\overline{PQ} \in \dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A)$. Es ist dann $Q \in GC_\beta(A)$. Gäbe es ein α-Lot $\overline{PQ'}$ gefällt auf $C_\beta(A)$ mit $\overline{PQ'} < \overline{PQ}$, so wäre, weil Q' wie Q ebenfalls äußerer Randpunkt von $L_\beta(A)$ ist, $\overline{PQ}$ nicht Lot auf $L_\beta(A)$, entgegen der Voraussetzung.

Auf Grund dieses Ergebnisses läßt sich nun in (5.20) auch schreiben:

$$\dot{L}_\alpha L_\beta(A) = \dot{L}_\alpha C_\beta(A) + L_\alpha{}^2 L_\beta(A). \tag{5.22}$$

$$\text{Folgerung:} \qquad \dot{L}_\alpha L_\beta(A) \supseteq \dot{L}_\alpha C_\beta(A) \tag{5.23}$$

Als Illustrationsbeispiel wähle man etwa für A zwei z. B. gleich große, punktfremde Kugeln, mit Zentren X und Y, $\beta > {}^1/_2 \overline{XY}$ und α passend klein.

Die letzte Beziehung zeigt schon, an einem speziellen Beispiel, daß, wenn E und F zwei Mengen sind mit $E \supseteq F$, nicht zu gelten braucht $\dot{L}_\alpha(E) \supseteq \dot{L}_\alpha(F)$ (Monotonie); denn in der vorigen Beziehung ist trotz $L_\beta(A) \subseteq C_\beta(A)$ $\dot{L}_\alpha L_\beta(A) \supseteq \dot{L}_\alpha C_\beta(A)$. Ferner ist auch das andere Monotoniegesetz im allgemeinen falsch: „Aus $\alpha > \beta$ folgt $L_\alpha(A) \supseteq L_\beta(A)$ oder $\dot{L}_\alpha(A) \supseteq \dot{L}_\beta(A)$." Als Gegenbeispiel wähle man etwa eine Hohlkugel vom innern Radius r ($\alpha > r > \beta$).

Die Ungültigkeit dieser Monotoniegesetze ist der Hauptgrund für die weitere Verarmung an Relationen gegenüber dem Operator H.

Im Gegensatz zu (5.23) gilt dagegen:

$$L_\alpha L_\beta(A) \subseteq L_\alpha C_\beta(A). \tag{5.24}$$

Beweis: Die behauptete Ungleichung kann man auch schreiben $\dot{L}_\alpha L_\beta(A) + L_\beta(A) \subseteq \dot{L}_\alpha C_\beta(A) + \bar{C}_\beta(A)$, oder $\dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A) + \dot{L}_\alpha{}^2 L_\beta(A) + L_\beta(A) \subseteq \dot{L}_\alpha C_\beta(A) + \bar{C}_\beta(A)$. Nun ist aber nach (5.21) $\dot{L}_\alpha{}^1 L_\beta(A) = \dot{L}_\alpha C_\beta(A)$, nach (5.19) $\dot{L}_\alpha{}^2 L_\beta(A) \subseteq \bar{C}_\beta(A)$ und nach (5.12) $L_\beta(A) \subseteq \bar{C}_\beta(A)$, womit (5.24) bewiesen ist.

Für die Iteration des Operators L ist die Regel $L_\alpha L_\beta(A) = L_{\alpha+\beta}(A)$ ungültig, im allgemeinen. Dagegen gilt die folgende abgeschwächte Fassung:

$$L_\alpha L_\beta(A) \supseteq L_{\alpha+\beta}(A) \tag{5.25}$$

Beweis: Wegen $A \subseteq L_\alpha L_\beta(A)$ ist nur noch zu zeigen $\dot{L}_{\alpha+\beta}(A) \subseteq L_\alpha L_\beta(A)$, d. h. jedes Lot $\overline{PQ} = \alpha + \beta \in \dot{L}_{\alpha+\beta}(A)$ gehört der Punktmenge $L_\alpha L_\beta(A)$ an. Zu dem Zwecke wählen wir auf $\overline{PQ}$ einen Punkt R mit $\overline{RQ} = \beta$ und zeigen,

daß sowohl die offenen Strecken $\overline{RQ}$ und $\overline{PR}$, wie auch der Punkt R, somit das ganze Lot $\overline{PQ} = \alpha + \beta$ gefällt auf A zu $L_\alpha L_\beta(A)$ gehört: 1. $\overline{RQ} \subseteq L_\alpha L_\beta(A)$. Nach (4.14) ist mit $\overline{PQ}$ auch $\overline{RQ}$ Lot auf A, also $\overline{RQ} \in L_\beta(A)$ und erst recht $\overline{RQ} \subseteq L_\alpha L_\beta(A)$. — 2. $\overline{PR} \subseteq L_\alpha L_\beta(A)$. Nach (4.24) ist, weil $\overline{PQ}$ Lot auf A ist, $\overline{PR}$ α-Lot auf $C_\beta(A)$, also im Hinblick auf (5.24) $\overline{PR} \subseteq L_\alpha C_\beta(A) = L_\alpha{}^1 L_\beta(A) \subseteq L_\alpha L_\beta(A)$, wobei R, weil $C_\beta(A)$ offen ist, auch inbegriffen ist.

Es seien hier noch einige weitere Monotonieeigenschaften bewiesen:

(5.26) Ist mit $\alpha < \beta$ auch $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\beta(A)$, so ist jedes Lot $\in \dot{L}_\alpha(A)$ in einem Lot $\in \dot{L}_\beta(A)$ enthalten.

Beweis: Jeder Punkt $P \in \dot{L}_\alpha(A)$ ist innerer Punkt eines Lotes $\overline{PR} = \alpha$ auf A. Wegen der Voraussetzung $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\beta(A)$ ist P auch innerer Punkt eines Lotes $\overline{Q'R'} = \beta$; dann müssen sie aber zufolge (4.17) in derselben Geraden liegen, somit ist $R = R'$, $\overline{QR}$ ist im Lot $\overline{Q'R'} = \overline{Q'R} > \overline{QR}$ enthalten.

(5.27) Gilt $L_\alpha(A) \subseteq L_\beta(A)$ für jedes $\alpha < \beta$, so folgt $L_{\alpha'}(A) \subseteq L_\alpha(A)$ für jedes $\alpha' < \alpha$.

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt $L_{\alpha'}(A) \subseteq L_\beta(A)$; nach (5.26) ist demnach jedes α'-Lot auf A in einem β-Lot enthalten. Da aber nach (4.14) jedes β-Lot auch stets ein α-Lot trägt, so ist jedes α'-Lot auch schon in einem α-Lot enthalten. Es ist also sicher $L_{\alpha'}(A) \subseteq L_\alpha(A)$.

Aus $A' \subset A$ folgt $L_\alpha(A') \subseteq L_\alpha(A)$ nur unter gewissen Einschränkungen. Zum Beispiel:

(5.28) Aus $A' \subset A$ und $L_\alpha(A) = C_\alpha(A)$ folgt $L_\alpha(A') \subseteq L_\alpha(A)$.

Beweis: Aus (2.9) folgt unter Berücksichtigung der Voraussetzungen: $L_\alpha(A') \subseteq C_\alpha(A') \subseteq C_\alpha(A) = L_\alpha(A)$.

§ 6. Äquivalente Aussagen

Wir haben im vorigen und früheren Kapiteln eine Anzahl Mengenungleichungen abgeleitet. Diese Relationen sind oft nicht unabhängig voneinander. Es kann sein, daß, wenn

in einer gewissen Relation das Gleichheitszeichen gilt, es notgedrungen auch in einer andern Relation gelten muß und umgekehrt. In diesem Falle nennen wir die entstehenden Mengengleichungen äquivalent. Wir wollen nun nach solchen äquivalenten Gleichungen Ausschau halten.

(6.1) Die Aussagen $C_{-\alpha}C_\alpha(A) = A$ (a) und $\dot{C}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$ (b) sind äquivalent.

Beweis: Es sei $\dot{C}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$, also $C_\alpha(A) K(A) = C_\alpha K C_\alpha(A) C_\alpha(A)$. Hierauf den Operator K angewendet gibt $K C_\alpha(A) + A = C_{-\alpha}C_\alpha(A) + K C_\alpha(A)$. Da die beiden Mengen links und ebenso die rechts punktfremd sind, so kann man auch schreiben: $A = C_{-\alpha}C_\alpha(A)$. — Die Umkehrung wurde bereits im letzten Teil des Beweises von (5.14.3) erledigt.

Folgende zwei Gleichungen folgen gegenseitig auseinander:

(6.2) $G\dot{C}_\alpha(A) = G\dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$ (a) $\qquad G(A) = GC_{-\alpha}C_\alpha(A)$ (b)

Beweis: Aus (a) folgt (b). (a) heißt $G(C_\alpha(A) - A) = G(C_\alpha K C_\alpha(A) - K C_\alpha(A))$. Dafür können wir nach (1.21), da die dortigen Voraussetzungen erfüllt sind, auch schreiben $GC_\alpha(A) + G(A) = GC_\alpha K C_\alpha(A) + GKC_\alpha(A)$, oder $GC_\alpha(A) + G(A) = GC_{-\alpha}C_\alpha(A) + GC_\alpha(A)$. Nun sind aber die beiden Mengen rechts und ebenso die links fremd, so daß man schließen kann: $G(A) = GC_{-\alpha}C_\alpha(A)$.

Da sich der ganze Beweis offenbar auch rückwärts lesen läßt, so folgt auch (a) aus (b).

(6.3) Aus $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$ (a) folgt $G(A) \supseteq GC_{-\alpha}C_\alpha(A)$ (b) und umgekehrt.

Beweis: Aus (a) folgt (b): Es sei $\overline{PQ}$ ein α-Lot auf $KC_\alpha(A)$, somit nach (4.19) P Randpunkt von $C_\alpha K C_\alpha(A)$, also $P \in GC_\alpha K C_\alpha(A) = GKC_\alpha K C_\alpha(A) = GC_{-\alpha}C_\alpha(A)$. Ist nun $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$, so heißt das, es ist umgekehrt auch $\overline{QP}$ Lot auf A, also $P \in G(A)$. Es ist also $G(A) \supseteq GC_{-\alpha}C_\alpha(A)$.

Aus (b) folgt (a): Ist nämlich $\overline{PQ}$ ein α-Lot auf $KC_\alpha(A)$, so ist (1) $Q \in GKC_\alpha(A) = GC_\alpha(A)$, (2) $P \in GC_\alpha K C_\alpha(A) = GKC_\alpha KC_\alpha(A) = GC_{-\alpha}C_\alpha(A) \in$ (Voraussetzung!) $G(A)$. Aus

(1) und (2) folgt aber $\overline{QP} = \alpha$ ist Lot auf A. Damit ist gezeigt $\dot{L}_\alpha(A) \supseteq \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$. Da anderseits nach (5.14) $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$ ist, so folgt (a).

(6.4) Existiert in jedem Randpunkt von A eine α-Stützkugel (α-Lot), so ist der Rand von A im Rand der α-Hülle $H_\alpha(A) = C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ enthalten, d. h. $G(A) \subseteq G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$, und umgekehrt.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert in jedem Randpunkt P von A ein α-Lot $\overline{QP} = \alpha$ auf A. Umgekehrt ist auch $\overline{PQ}$ ein α-Lot auf $K C_\alpha(A)$, somit nach (4.19) $P \in G C_\alpha(K C_\alpha(A)) = G K C_\alpha K C_\alpha(A) = G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$. Aus $P \in G(A)$ folgt also $P \in G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ für jeden Punkt $P \in G(A)$, d. h. $G(A) \subseteq G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$. — Beweis der Umkehrung: Es sei $G(A) \subseteq G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$. $G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ ist nach (4.19) die Menge der Punkte P, von denen aus α-Lote auf $K C_\alpha(A)$ gefällt werden können, denn es ist $G C_{-\alpha} C_\alpha(A) = G C_\alpha(K C_\alpha(A))$. Da $G(A) \subseteq G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ ist, so existiert also von jedem Punkte $P \in G(A)$ ein α-Lot $\overline{PQ} = \alpha$ auf $K C_\alpha(A)$. Umgekehrt ist dann $\overline{QP} = \alpha$ Lot auf A, so daß also in jedem Punkt $P \in G(A)$ ein α-Lot existiert.

Die Aussagen: „Die innere α-Hülle einer Menge fällt mit deren offenem Kern zusammen“ und „der offene Kern einer Menge läßt sich als äußere Parallelmenge im Abstand α darstellen“ sind gleichwertig:

(6.5) Aus $C_\alpha C_{-\alpha}(A) = \underline{A}$ folgt die Existenz einer Menge A' mit $\underline{A} = C_\alpha(A')$ und umgekehrt.

Beweis: Ist $C_\alpha C_{-\alpha}(A) = \underline{A}$, so ist $C_{-\alpha}(A)$ diese Menge A'. Existiert zu A eine Menge A' mit $\underline{A} = C_\alpha(A')$, so folgt nach (2.17)* $C_\alpha C_{-\alpha}(\underline{A}) = C_\alpha C_{-\alpha} C_\alpha(A') = C_\alpha(A') = \underline{A}$.

Analog beweist man:

(6.5)* Aus $C_{-\alpha} C_\alpha(A) = A$ folgt die Existenz einer Menge A' mit $A = C_{-\alpha}(A')$ und umgekehrt.

Nachstehende vier Aussagen folgen gegenseitig auseinander:

(6.6) (a) $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$, (b) $\dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$, (c) aus $\alpha' < \alpha$ folgt $\dot{L}_{\alpha'}(A) \subseteq \dot{L}_\alpha(A)$, (d) alle Lote der Länge $\alpha' < \alpha$ gefällt auf A sind eindeutig.

Beweis: 1. Nach (5.14) folgt (b) aus (a). — 2. Aus (b) folgt (a). Nach Voraussetzung ist nämlich $\dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$ (I). Hieraus folgt nach (5.14) $\dot{C}_\alpha K C_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$, also auch $G\dot{C}_\alpha K C_\alpha(A) = G\dot{C}_\alpha(A)$, woraus nach (6.1), (6.3) folgt $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$ (II). Aus (I) und (II) ergibt sich $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$. — 3. Aus (a) folgt (c); denn nach (5.11) und (2.8) ist $\dot{L}_{\alpha'}(A) \subseteq \dot{C}_{\alpha'}(A) \subseteq \dot{C}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha(A)$. — 4. Aus (c) folgt (a): Da nach (5.11) $\dot{C}_\alpha(A) \supseteq \dot{L}_\alpha(A)$, so ist noch zu zeigen, daß aus $P \in \dot{C}_\alpha(A)$ folgt $P \in \dot{L}_\alpha(A)$. $\overline{PQ} = \alpha' < \alpha$ sei Lot von P auf A. Nach (5.26) ist $\overline{PQ}$ in einem Lot $\overline{RQ} = \alpha$ enthalten, wobei P innerer Punkt von $\overline{RQ}$ ist. Es ist also $P \in \overline{RQ} \in \dot{L}_\alpha(A)$. — Aus (a) folgt (d): Angenommen es gäbe einen Punkt P, von dem aus auf A zwei verschiedene Lote $\overline{PQ} = \alpha' < \alpha$ und $\overline{PR} = \alpha'$ existieren. Wegen der Voraussetzung ist $P \in \dot{C}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha(A)$, P liegt also auf einem Lot $\overline{QS}$ der Länge α gefällt auf A. Mindestens eines der beiden Lote $\overline{PQ}$ oder $\overline{PR}$ hätte von $\overline{QS}$ verschiedene Richtung. Der Endpunkt dieses Lotes wäre dann innerer Punkt des Lotes $\overline{QS}$, was (4.17) widerspricht. — Aus (d) folgt (a): P sei ein Punkt $\in \dot{C}_\alpha(A)$, $\overline{PR} = \alpha' < \alpha$ das nach Voraussetzung einzige Lot von P auf A. Angenommen $\overline{PR}$ sei nicht über P hinaus bis zu einem Punkte Q verlängerbar, derart, daß $\overline{QR} = \alpha$ und $\overline{QR}$ Lot auf A ist. Entweder ist dann $\overline{PR}$ überhaupt nicht verlängerbar (immer im Sinne von (4.11)!), oder nur bis zu einem Punkte S, mit $\overline{SR} < \alpha$. Im zweiten Falle (im ersten machen wir Entsprechendes mit P!) läßt sich um S eine Umgebung $C_\epsilon(S)$ legen, die ganz in $\dot{C}_\alpha(A)$ liegt, wenn man $\epsilon < \alpha - \overline{SR}$ wählt. Jede Umgebung von S enthält aber nach dem Satz (4.16) (von *Motzkin*) einen Punkt T, von dem aus mindestens zwei Lote auf A existieren, was unserer Voraussetzung widerspricht. Unsere Annahme war also falsch, P muß auf einem Lot der Länge α liegen, d. h. $P \in \dot{L}_\alpha(A)$. Somit ist $\dot{L}_\alpha(A) \supseteq \dot{C}_\alpha(A)$. Da anderseits nach (5.11) $\dot{L}_\alpha(A) \subseteq \dot{C}_\alpha(A)$, so folgt $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$.

§ 7. Schranken für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in einigen abgeleiteten Mengenungleichungen

(7.1) Aus $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$ und $\alpha' < \alpha$ folgt auch $\dot{L}_{\alpha'}(A) = \dot{C}_{\alpha'}(A)$.

Beweis: Nach (5.11) ist $\dot{L}_{\alpha'}(A) \subseteq \dot{C}_{\alpha'}(A)$, also ist nur noch zu zeigen $\dot{L}_{\alpha'}(A) \supseteq \dot{C}_{\alpha'}(A)$, d. h. aus $P \in \dot{C}_{\alpha'}(A)$ folgt $P \in \dot{L}_{\alpha'}(A)$. $\overline{PQ}$ sei Lot von P auf A. Es ist $\overline{PQ} < \alpha'$. Nach (2.8) und Voraussetzung ist $P \in \dot{C}_{\alpha'}(A) \subseteq \dot{C}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha(A)$. P liegt also auf einem α-Lot und damit auch auf einem α'-Lot gefällt auf A, d. h. $P \in \dot{L}_{\alpha'}(A)$ (vgl. 4.14).

(7.2) Durch diesen Sachverhalt wird eine Dedekindsche Schnittzahl α_1 definiert mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha < \alpha_1$ gilt $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$, dagegen für kein $\alpha > \alpha_1$. Diese Zahl α_1 ist zugleich im selben Sinne Schnittzahl für die Gültigkeit der Aussagen (6.6)d, (6.6)b und (6.6)c.

Daß auch für die Gültigkeit der Gleichung (6.1)a und die damit äquivalente Aussage (6.1)b eine Schnittzahl α_2 im Sinne von (7.2) existiert, wurde bereits unter (2.18), (2.19) bewiesen.

(7.3) Aus $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$ und $\alpha' < \alpha$ folgt nicht allgemein $\dot{L}_{\alpha'}(A) = \dot{C}_{\alpha'} K C_{\alpha'}(A)$.

Gegenbeispiel: A sei Rand eines Würfels mit der Kante a. Für $\alpha > a:2$ ist $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$, für $\alpha \leqq a:2$ ist dagegen $\dot{L}_\alpha(A)$ echte Teilmenge von $\dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$. — Für die Richtigkeit dieser Gleichung existiert also keine Schnittzahl im Sinne von (7.2).

(7.4) In diesem Falle haben wir Anlaß zwei Zahlen einzuführen, nämlich eine Zahl α_{31} definiert als untere Grenze aller α, für welche Gleichung (7.3) nicht gilt (das ist zugleich die größte Zahl mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha < \alpha_{31}$ Gleichung (7.3) gilt), und eine obere Grenze α_{32} aller α, für welche Gleichung (7.3) gilt (zugleich kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha > \alpha_{32}$ Gleichung (7.3) nicht gilt). Natürlich ist $\alpha_{31} \leqq \alpha_{32}$. Ist $\alpha_{31} = \alpha_{32}$ $(= \alpha_3)$, so ist α_3 eine Schnittzahl im Sinne von (7.2). Alle diese Zahlen können auch 0 oder ∞ sein. Im unter (7.3) erwähnten Beispiel, wo A der Rand eines Würfels ist, ist etwa $\alpha_{31} = 0$

und $\alpha_{32} = \infty$. Für einen ausgefüllten Würfel wäre $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \infty$.

(7.5) Zur Gleichung $\dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$ gehört natürlich gemäß (7.1) eine Schnittzahl α_4 im Sinne von (7.2).

(7.6) Dagegen ist der Gleichung (6.3)a $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$ und damit auch (6.3)b nur eine obere und untere Grenze α_{52} und α_{51} zugeordnet im Sinne von (7.4). Gegenbeispiel: Dasselbe wie unter (7.3).

(7.7) Auch für die Aussagen (6.4) existiert eine Schnittzahl α_6 im Sinne von (7.2). Die Existenz dieser Schnittzahl wurde bereits unter (4.14) bewiesen.

(7.8) Aus $G C_{-\alpha} C_\alpha(A) \subseteq G(A)$ und $\alpha' < \alpha$ folgt nicht unbedingt $G C_{-\alpha'} C_{\alpha'}(A) \subseteq G(A)$.

Gegenbeispiel: A sei die Außenfläche eines Würfels der Kantenlänge a. Für $\alpha > a:2$ ist $G C_{-\alpha} C_\alpha(A) = G(A)$, für $0 < \alpha < a:2$ ist aber $G C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ nicht in $G(A)$ enthalten.

Die zu (7.8) gehörigen Schranken im Sinne von (7.4) seien mit α_{71} und α_{72} bezeichnet.

(7.9) Aus $C_\alpha(AB) = C_\alpha(A) C_\alpha(B)$ und $\alpha' < \alpha$ folgt $C_{\alpha'}(AB) = C_{\alpha'}(A) C_{\alpha'}(B)$.

Beweis: Wir setzen $\alpha = \alpha' + \epsilon$ und können auf Grund der Voraussetzungen von (2.15) und von (2.23.2)* schreiben: $C_\alpha(AB) = C_\alpha(A) C_\alpha(B) = C_{\alpha'+\epsilon}(A) C_{\alpha'+\epsilon}(B) = C_{\alpha'+\epsilon}(AB) = \underline{C_\epsilon C_{\alpha'}(AB)} = C_\epsilon C_{\alpha'}(A) C_\epsilon C_{\alpha'}(B) \supseteq \underline{C_\epsilon (C_{\alpha'}(A) C_{\alpha'}(B))}$. Aus der unterstrichenen Beziehung folgt zufolge (2.9) $C_{\alpha'}(AB) \supseteq C_{\alpha'}(A) C_{\alpha'}(B)$. Da nach (2.23.2)* anderseits $C_{\alpha'}(AB) \subseteq C_{\alpha'}(A) C_{\alpha'}(B)$ ist, so folgt $C_{\alpha'}(AB) = C_{\alpha'}(A) C_{\alpha'}(B)$. — Die damit gesicherte Schnittzahl im Sinne von (7.2) für die Gültigkeit der Gleichung $C_\alpha(AB) = C_\alpha(A) C_\alpha(B)$ sei mit β_3 bezeichnet.

(7.10) Aus $C_{-\alpha}(A) + C_{-\alpha}(B) = C_{-\alpha}(A + B)$ und $\alpha' < \alpha$ folgt $C_{-\alpha'}(A) + C_{-\alpha'}(B) = C_{-\alpha'}(A + B)$.

(7.11) Aus $C_\alpha(A - B) = C_\alpha(A) - C_{-\alpha}(B)$ und $\alpha' < \alpha$ folgt $C_{\alpha'}(A - B) = C_{\alpha'}(A) - C_{-\alpha'}(B)$. Diese beiden Behauptungen folgen aus (7.9), weil die Relationen (2.23.2), (2.23.2)* und (2.23.2)** wechselseitig auseinander hervorgehen durch den Übergang zu den Komplementärmengen von A und B.

(7.12) Ist jedes Lot der Länge α gefällt auf A eindeutig, so ist nicht immer jedes Lot der Länge $\alpha' < \alpha$ eindeutig.

Gegenbeispiel: Man nehme für A eine Kugelfläche vom Radius r und wähle $\alpha > r$, $\alpha' = r$.

(7.13) Aus $L_\alpha(A+B) = L_\alpha(A) + L_\alpha(B)$ folgt nicht immer für jedes $\alpha' < \alpha$ $L_{\alpha'}(A+B) = L_{\alpha'}(A) + L_{\alpha'}(B)$.

Als Gegenbeispiel wähle man für A und B etwa zwei konzentrische Hohlkugeln. Der äußere Rand der kleinern falle mit dem innern Rand der größern zusammen. Die innere Hohlkugel habe den innern Radius r und den äußern $b+r$. Man wähle α und α' so, daß $\alpha > r+b > \alpha' > b > r$.

(7.14) Aus $L_\alpha(A+B) = C_\alpha(A+B)$ folgt $L_\alpha(A+B) = L_\alpha(A) + L_\alpha(B)$.

Beweis: Nach Voraussetzung und (2.22) ist $L_\alpha(A+B) = C_\alpha(A+B) = C_\alpha(A) + C_\alpha(B)$. Nun ist aber $C_\alpha(A) \supseteq L_\alpha(A)$ und $C_\alpha(B) \supseteq L_\alpha(B)$, woraus folgt $L_\alpha(A+B) \supseteq L_\alpha(A) + L_\alpha(B)$. Anderseits ist aber nach (5.10) $L_\alpha(A+B) \subseteq L_\alpha(A) + L_\alpha(B)$, woraus sich die Behauptung ergibt.

(7.15) Die Umkehrung von (7.14) ist nicht allgemein richtig. Dies geht schon daraus hervor, daß man der Gleichung $L_\alpha(A+B) = L_\alpha(A) + L_\alpha(B)$ keine Schnittzahl im Sinne von (7.2) zuordnen kann, wie unter (7.13) gezeigt wurde, im Gegensatz zur Gleichung $C_\alpha(A+B) = L_\alpha(A+B)$, wo eine solche Schnittzahl nach (7.1) existiert.

(7.16) Aus $L_\alpha L_\beta(A) = L_{\alpha+\beta}(A)$ und $\alpha' < \alpha$, $\beta' < \beta$ folgt nicht allgemein $L_{\alpha'} L_{\beta'}(A) = L_{\alpha'+\beta'}(A)$.

Als Gegenbeispiel nehme man für A eine Kugelfläche vom Radius r und wähle α und $\beta > r$ und α', $\beta' < r$ aber $> r:2$.

(7.17) Aus $L_{\alpha+\beta}(A) = C_{\alpha+\beta}(A)$ folgt $L_\alpha L_\beta(A) = L_{\alpha+\beta}(A)$.

Beweis: Unter Beachtung von (2.15), (5.12), (5.24) und der Voraussetzung erhält man: $L_{\alpha+\beta}(A) = C_{\alpha+\beta}(A) = C_\alpha C_\beta(A) \supseteq L_\alpha C_\beta(A) \supseteq L_\alpha L_\beta(A)$. Da anderseits nach (5.25) $L_{\alpha+\beta}(A) \subseteq L_\alpha L_\beta(A)$, so folgt $L_{\alpha+\beta}(A) = L_\alpha L_\beta(A)$.

§ 8. Vergleich der verschiedenen Schranken in einigen abgeleiteten Mengenungleichungen und -gleichungen

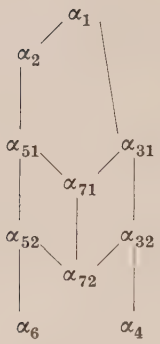
Wir vergleichen nun einige der früher besprochenen Schranken betreffend die Gültigkeit gewisser Mengengleichungen, Mengenungleichungen und Aussagen. Zunächst stellen wir sie der Übersichtlichkeit halber zusammen.

(8.1)

Aussage	Schnittzahl (im Sinne von (7.2))	Grenzen (im Sinne von (7.4))	
		Obere	Untere
$\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$ $\dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$ Aus $\alpha' < \alpha$ folgt $\dot{L}_{\alpha'}(A) \subseteq \dot{L}_\alpha(A)$ Alle Lote der Länge $\alpha' < \alpha$ gefällt auf A sind eindeutig	α_1		
$C_{-\alpha} C_\alpha(A) = A$ $\dot{C}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$	α_2		
$\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$		α_{32}	α_{31}
$\dot{L}_\alpha K C_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$	α_4		
$G C_{-\alpha} C_\alpha(A) = G(A)$ $G \dot{C}_\alpha(A) = G \dot{C}_\alpha K C_\alpha(A)$		α_{52}	α_{51}
$G C_{-\alpha} C_\alpha(A) \supseteq G(A)$ In jedem Randpunkt von A existiert eine α-Stützkugel	α_6		
$G C_{-\alpha} C_\alpha(A) \subseteq G(A)$ $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{L}_\alpha K C_\alpha(A)$		α_{72}	α_{71}

Zwischen diesen Zahlen bestehen folgende Beziehungen, wobei Tieferstehen entlang einer Linie Größersein oder eventuelle Gleichheit bedeutet:

(8.2)



Beweis: Daß $\alpha_{31} \leqq \alpha_{32}$, $\alpha_{51} \leqq \alpha_{52}$ und $\alpha_{71} \leqq \alpha_{72}$ ist, folgt aus der Definition dieser Zahlen. Dabei gilt das Gleichheitszeichen im allgemeinen nicht, wie schon an Beispielen unter (7.4), (7.6), (7.8) dargetan wurde. — Die Ungleichungen $\alpha_1 \leqq \alpha_2$, $\alpha_{31} \leqq \alpha_{71}$, $\alpha_{32} \leqq \alpha_{72}$, $\alpha_1 \leqq \alpha_{31}$, $\alpha_2 \leqq \alpha_{51}$, $\alpha_{32} \leqq \alpha_4$, $\alpha_{52} \leqq \alpha_6$, $\alpha_{51} \leqq \alpha_{71}$ und $\alpha_{52} \leqq \alpha_{72}$ ergeben sich alle aus der Tabelle (8.1), zum Teil unter gleichzeitiger Beachtung der Relationen (5.14). Das Gleichheitszeichen gilt in diesen neun Ungleichungen im allgemeinen nicht, wie folgende Beispiele zeigen: (a) A bestehe aus zwei Punkten P und Q. Dann ist $\alpha_{32} = {}^1/_2 \overline{PQ} < \alpha_2 = \infty$, woraus folgt $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_{31} < \alpha_{71}$, $\alpha_{32} < \alpha_{72}$, wie aus den eben bewiesenen neun Ungleichungen sofort ersichtlich ist. — (b) Besteht A aus einer Kugelfläche vom Radius r, so ist $\alpha_2 = r < \alpha_{31} = \alpha_{51} = \infty$, woraus folgt $\alpha_1 < \alpha_{31}$ und $\alpha_2 < \alpha_{51}$. — (c) Daß $\alpha_{32} < \alpha_4$ und $\alpha_{52} < \alpha_6$ sein kann, zeigt etwa das Beispiel einer Polyederfläche mit einspringender Ecke, wo $\alpha_{32} = \alpha_{52} = 0 < \alpha_4 = \alpha_6$ ist. — (d) Ist schließlich A eine Hohlkugel vom innern Radius r und der Wandstärke $d > 0$, so ist $\alpha_{51} < \alpha_{71}$ und $\alpha_{52} < \alpha_{72}$, denn hier ist $\alpha_{51} = \alpha_{52} = r < \alpha_{71} = \alpha_{72} = \infty$.

Andere allgemein gültige Größenreihenfolgen zwischen irgend zwei unserer zehn Schranken als die zwölf unter (8.2) und die weitern fünfzehn aus diesen sich a fortiori ergebenden (z. B. $\alpha_{71} \geqq \alpha_2$ aus $\alpha_{51} \geqq \alpha_2$ und $\alpha_{71} \geqq \alpha_{51}$) existieren nicht. Unser Diagramm (8.2) ist also in diesem

Sinne vollständig. Um dies nachzuweisen, haben wir noch die restlichen $\binom{10}{2} - 12 - 15 = 18$ Zahlenpaare zu untersuchen: (1) α_6 steht zu α_{31}, α_{32}, α_{71}, α_{72} in keiner bestimmten, allgemein gültigen Größenbeziehung; denn für eine Hohlkugel vom innern Radius r und der Wandstärke $d > 0$ ist $\alpha_6 = r < \alpha_{31} = \infty$, während beispielsweise für eine Polyederfläche mit einspringender Ecke gilt $\alpha_6 > \alpha_{72} = 0$. (2) Auch zwischen α_4 und den Grenzen α_{51}, α_{52}, α_2, α_{71} und α_{72} besteht keine bestimmte Größenbeziehung. Für einen Polyederkörper mit einspringender Ecke ist nämlich $\alpha_4 = \infty > \alpha_6 = \alpha_{72} = 0$, während für eine Menge bestehend aus zwei Punkten P und Q gilt $\alpha_4 = {}^1/_2\,\overline{PQ} < \alpha_2 = \infty$. — (3) α_{31} und α_{32} lassen sich weder mit α_{51} noch mit α_{52} in eine bestimmte Größenreihenfolge bringen. Für eine Menge A bestehend aus zwei Punkten P und Q ist nämlich $\alpha_{32} = {}^1/_2\,\overline{PQ} < \alpha_{51} = \infty$, dagegen für eine Hohlkugel vom innern Radius r und der Wandstärke $d > 0$ $\alpha_{52} = r < \alpha_{31} = \infty$. (4) Weder α_{71} und α_{52}, noch α_{71} und α_{32} lassen sich ordnen. Für die unter (1) schon gebrauchte Hohlkugel ist nämlich $\alpha_{52} = r < \alpha_{71} = \infty$, während für eine Würfelfläche gilt $\alpha_{52} = \infty > \alpha_{71} = 0$. Für die Würfelfläche ist ferner $\alpha_{32} = \infty > \alpha_{71} = 0$, dagegen gilt für die Menge bestehend aus zwei Punkten P und Q $\alpha_{32} = {}^1/_2\,\overline{PQ} < \alpha_{71} = \infty$. (5) Schließlich lassen sich weder α_2 und α_{31}, noch α_2 und α_{32} ordnen. Besteht nämlich A aus zwei Punkten P und Q, so ist $\alpha_2 = \infty > \alpha_{32} = {}^1/_2\,\overline{PQ}$; für eine Kugelfläche vom Radius r ist dagegen $\alpha_2 = r < \alpha_{31} = \infty$. — Damit sind die Größenbeziehungen zwischen irgend zweien unserer zehn Schranken vollständig abgeklärt.

§ 9. Konvexe Mengen

(9.1) Eine konvexe Punktmenge ist bekanntlich[13]) dadurch definiert, daß sie mit zwei Punkten X und Y die ganze Strecke $\overline{XY}$ enthält.

[13]) *Bonnesen-Fenchel* [1], S. 2.

(9.2) Es ist eine der am einfachsten zu beweisenden Tatsachen über konvexe Mengen, daß jedes Lot gefällt auf sie eindeutig ist.

(9.3) Viel tiefer liegt die ebenfalls richtige Umkehrung dieses Satzes: Ist jedes Lot gefällt auf A eindeutig, so ist A konvex.

Daß dieser Satz nicht ganz einfach zu beweisen ist, dürfte aus der Tatsache hervorgehen, daß er in *T. Bonnesen-W. Fenchel* [1] noch nicht aufgeführt ist, obschon der Versuch, den einfachen Satz (9.2) umzukehren, sich doch aufdrängen mußte. Er scheint erstmals von *L. N. H. Bunt* [1] bewiesen worden zu sein. Spätere Beweise stammen von *T. Motzkin* [1], der ihn als Folgerung aus dem von ihm bewiesenen Satz (4.16) ableitet, *N. Kritikos* [1], *B. Jessen* [1], *L. Beretta* und *A. Maxia* [1].

Zusammenfassend läßt sich also sagen:

(9.4) Eine Punktmenge ist dann und nur dann konvex, wenn alle Lote gefällt auf sie eindeutig sind.

Im Hinblick auf das Äquivalenzensystem (6.6) kann man auch sagen:

(9.5) Eine Punktmenge A ist dann und nur dann konvex, wenn für jedes α $(0 < \alpha < \infty)$ gilt $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$, wenn sich also die außerhalb von A liegende Teilmenge von $C_\alpha(A)$ für jedes α als Vereinigungsmenge von Loten konstanter Länge α gefällt auf A darstellen läßt. (Diese Lote sind im übrigen nach (4.17) punktfremd.)

Unter Verwendung des Begriffes „Lotstrahl" (siehe 4.12) läßt sich auch sagen:

(9.6) Eine Menge A ist dann und nur dann konvex, wenn sich ihre Komplementärmenge $K(A)$ als Vereinigungsmenge von Lotstrahlen auf A darstellen läßt.

Beweis: (a) A sei konvex und P ein beliebiger Punkt $\in K(A)$. Es ist zu zeigen, daß P auf einem Lotstrahl auf A liegt. Wir fällen ein Lot $\overline{PQ}$ auf A und verlängern es so weit wie möglich über P hinaus, immer im Sinne von (4.11). Angenommen dies ginge nur bis zu einem bestimmten Punkte R, wobei natürlich auch $R = P$ sein kann. Nach

(4.16) ist dann $\overline{RQ}$ entweder nicht eindeutiges Lot oder enthält jedenfalls in jeder Umgebung $C_\epsilon(\overline{RQ})$ nicht eindeutige Lote auf A. Beides widerspricht nach (9.4) der Konvexität. — (b) P sei ein beliebiger Punkt $\in K(A)$ und liege auf einem unendlich langen Lot (Lotstrahl) auf A. Es gibt also nach Definition (4.12) eine Halbgerade s, die P enthält und in einem Randpunkt von A beginnt, derart, daß für jeden Punkt $R \in s$, insbesondere jeden Punkt R jenseits P, $\overline{RQ}$ Lot auf A ist. Weil $\overline{RQ}$ Lot auf A ist, so muß nach (4.14) $\overline{PQ}$ eindeutiges Lot auf A sein. Das Lot von jedem Punkte P gefällt auf A ist also eindeutig, A nach (9.4) also konvex.

(9.7) Eine Menge A ist genau dann konvex, wenn $C_{-\infty} C_\infty(A) = A$ ist. Das bedeutet nach (3.3): A ist genau dann konvex, wenn die konvexe Hülle von A mit A zusammenfällt. Dies ist aber ein bekannter Satz[14]). Mit $C_{-\infty} C_\infty(A)$ ist auch $C_{-\alpha} C_\alpha(A)$ für jedes α $(0 < \alpha < \infty)$ mit A identisch. Die etwas schwächere Aussage als (9.7): „Ist für jedes endliche α $C_{-\alpha} C_\alpha(A) = A$, so ist A konvex" ist falsch. Als Gegenbeispiel wähle man für A zwei Punkte X und Y. Hier ist $C_{-\alpha} C_\alpha(A) = A$ für jedes α $(0 < \alpha < \infty)$, aber $C_{-\infty} C_\infty(A) = \overline{XY} \supset A$.

Durch den Übergang $A \to K(A)$ ergibt sich aus (9.7) leicht:

(9.7)* Eine Menge A ist genau dann Komplementärmenge einer konvexen Menge, wenn $C_\infty C_{-\infty}(A) = A$ ist.

Die beiden folgenden Sätze beweisen wir zusammen. A sei konvex und $\overline{PQ}$ eine Strecke von der mindestens einer der Endpunkte in $K(A)$ liegt, X ein beliebiger Punkt auf $\overline{PQ}$, $d(P)$, $d(Q)$, $d(X)$ seien die Abstände der Punkte P, Q, X von A und es sei (etwa) $d(P) \leqq d(Q)$. Dann ist

(9.8) $$d(X) \leqq d(Q)$$

d. h. von allen Punkten einer Strecke $\overline{PQ}$, von der mindestens einer der Endpunkte in $K(A)$ liegt, besitzt einer der beiden Endpunkte den größten Abstand von A.

[14]) *Bonnesen-Fenchel* [1], S. 5.

(9.9) Mit A ist auch $C_\alpha(A)$ konvex[15]).

Beweis: P und Q seien zwei Punkte, von denen mindestens einer, etwa $Q \in K(A)$ sei. Wir fällen die Lote $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ von P und Q auf A. Falls $P \in A$ ist, so ist im folgenden $P' = P$ zu setzen. X sei ein beliebiger Punkt auf $\overline{PQ}$ und X' der X entsprechende Punkt auf $\overline{P'Q'}$, d. h. der Punkt, welcher $\overline{P'Q'}$ im selben Verhältnis teilt wie X die Strecke $\overline{PQ}$. $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ seien die Ortsvektoren von P, Q, P', Q', X, X' nach Einführung eines Koordinatensystems. Dann ist $d(X) \leqq \overline{XX'} = |\mathfrak{p} + \lambda(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}) - \{\mathfrak{p}' + \lambda(\mathfrak{q}' - \mathfrak{p}')\}| = |(1-\lambda)(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}') + \lambda(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}')| \leqq (1-\lambda)|\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'| + \lambda|\mathfrak{q} - \mathfrak{q}'| \leqq (1-\lambda)|\mathfrak{q} - \mathfrak{q}'| + \lambda|\mathfrak{q} - \mathfrak{q}'| = d(Q)$, mit $0 \leqq \lambda \leqq 1$, womit (9.8) bewiesen ist.

Zum Beweise von (9.9) denken wir uns im Beweisgang des vorigen Satzes P und Q in $C_\alpha(A)$ liegend und wieder $Q \in K(A)$. (Wenn sowohl P wie $Q \in A$ ist, so ist nichts zu beweisen). Dann ist $|\mathfrak{q} - \mathfrak{q}'| < \alpha$, also auch $d(X) < \alpha$, d. h. $X \in C_\alpha(A)$, was zu beweisen war.

$\overline{PQ}$ sei eine Strecke in einer konvexen Menge A, X ein beliebiger Punkt auf $\overline{PQ}$, $d(P)$, $d(Q)$, $d(X)$ seien die Abstände der Punkte P, Q, X von $\overline{K}(A)$ und es sei (etwa) $d(P) \leqq d(Q)$. Dann ist

(9.10) $$d(P) \leqq d(X)$$

d. h. von allen Punkten einer in einer konvexen Menge liegenden Strecke, nimmt einer der Streckenendpunkte den kleinsten Abstand von $\overline{K}(A)$ an.

Gleichzeitig mit diesem Satz beweisen wir den folgenden:

(9.11) Mit A ist auch $C_{-\alpha}(A)$ konvex.

Beweis: Wäre für ein X auf $\overline{PQ}$ $d(X) = \overline{XF} < d(P)$, so gäbe es auch noch auf der F-seitigen Verlängerung von $\overline{XF}$ einen Punkt $X' \in K(A)$ mit $\overline{X'X} < d(P)$. Wir ziehen $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ parallel, gleich und gleich gerichtet zu $\overline{XX'}$. Wegen $\overline{XX'} < d(P) \leqq d(Q)$ wären P' und $Q' \in A$. Weil aber

---

[15]) Siehe *Bonnesen-Fenchel* [1], S. 29 und 30, Nr. 20 und 21. Satz (9.9) erscheint dort als Spezialfall eines allgemeinern Satzes.

A konvex ist, so müßte mit P' und Q' auch X' zu A gehören, was einen Widerspruch ergibt.

Zum Beweise von (9.11) nehmen wir P und Q in $C_{-\alpha}(A)$ liegend an. Im Hinblick auf (2.1)* und (9.10) ist dann $\alpha \leqq d(P) \leqq d(X)$, also $C_\alpha(X) \subset A$, d. h. nach (2.4)* $X \in C_{-\alpha}(A)$.

(9.12) Wir wollen Satz (9.4) erweitern. — Es seien P und Q zwei Randpunkte der Menge A, die auch zusammenfallen dürfen. In ihnen sollen zwei Lote $\overline{RP}$ und $\overline{SQ}$ existieren. Existiert nun ein Punktepaar (U, V) mit U auf $\overline{RP}$ und V auf $\overline{SQ}$, so daß $\overline{UV} < \overline{PQ}$ ist, so soll das Lotpaar $\overline{PR}$ und $\overline{SQ}$ divergent heißen, andernfalls konvergent (im Spezialfall parallel).

Ein Sonderfall eines divergenten Lotpaares $(\overline{PR}, \overline{QS})$ ist der, wo $R = S$, $P \neq Q$ ist, wo also vom Punkte $R = S$ aus mehr als ein Lot gefällt werden kann. — Ist $P = Q$, so ist das Lotpaar $(\overline{RP}, \overline{SQ})$ natürlich nie divergent.

Es gilt nun der folgende Satz, den man nach dem eben Gesagten als eine Erweiterung von Satz (9.4) erkennt:

(9.13) Eine Menge A ist genau dann konvex, wenn kein Lotpaar gefällt auf A divergent ist.

Beweis: a) Ist A konvex, so ist kein Lotpaar $(\overline{RP}, \overline{SQ})$ gefällt auf A divergent: Wir setzen $\overrightarrow{PR} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{QS} = \mathfrak{b}$. U sei ein beliebiger Punkt auf $\overline{PR}$, V ein beliebiger Punkt auf $\overline{QS}$. Wir können schreiben $\overrightarrow{PU} = \lambda\,\mathfrak{a}\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, $\overrightarrow{QV} = \mu\,\mathfrak{b}\,(0 \leqq \mu \leqq 1)$. Wegen der Konvexität von A existiert in P und Q je eine Stützebene[16]) senkrecht zu $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$. Wir wählen A-seits beider Stützebenen den Ursprung O eines Koordinatensystems. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ seien die Ortsvektoren von P und Q. Q liegt A-seits von oder auf der Stützebene E_1 in P, also ist $\lambda\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}) \leqq 0$. P liegt A-seits von oder auf der Stützebene E_2 in Q, somit ist $\mu\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{p} - \mathfrak{q}) \leqq 0$. Durch Addition erhält man $(\lambda\,\mathfrak{a} - \mu\,\mathfrak{b})\,(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}) \leqq 0$ (1). Zu zeigen ist $\overline{UV} > \overline{PQ}$ oder $[(\mathfrak{p} + \lambda\,\mathfrak{a}) - (\mathfrak{q} + \mu\,\mathfrak{b})]^2 \geqq (\mathfrak{p} - \mathfrak{q})^2$, oder umgeformt $(\lambda\,\mathfrak{a} - \mu\,\mathfrak{b})^2 \geqq 2\,(\mathfrak{q} - \mathfrak{p})\,(\lambda\,\mathfrak{a} - \mu\,\mathfrak{b})$ (2). Die linke Seite von (2) ist nicht-negativ, die rechte nach (1) nicht positiv. (2) ist also richtig, (a) ist somit bewiesen.

[16]) Siehe etwa *Bonnesen-Fenchel* [1], S. 6.

b) Ist kein Lotpaar $(\overline{RP}, \overline{SQ})$ gefällt auf A divergent, so ist A konvex: Ist kein Lotpaar divergent, so gibt es insbesondere auch keine mehrdeutigen Lote, so daß nach (9.4) A konvex ist.

(9.14) Folgerung aus (9.4) und (9.13):

Enthält eine Menge A nicht-eindeutige Lotpaare $\overline{RP}$ und $\overline{RQ}$, so gehören zu ihr auch stets divergente (und eindeutige) Lotpaare ohne gemeinsamen Aufpunkt. Dies ist selbstverständlich, man verkürze einfach die beiden Lote!

Umgekehrt: Enthält eine Menge A divergente Lotpaare, so sind darunter stets auch solche mit gemeinsamem Aufpunkt (= nicht-eindeutige Lote).

Gäbe es nämlich keine solchen, so müßte A nach (9.3) konvex sein. Ist aber A konvex, so kann es nach (9.13) überhaupt keine divergenten Lotpaare geben, woraus sich ein Widerspruch ergibt.

§ 10. Unterkonvexe Mengen

Es ist eine bekannte Tatsache[17]), daß für eine beschränkte, konvexe Menge A im R_n das Volumen $VC_\alpha(A)$ von $C_\alpha(A)$ für jedes $\alpha\,(0 \leqq \alpha < \infty)$ eine ganze rationale Funktion von α von höchstens n. Grade ist (Formel von Steiner-Minkowski). Einfache Beispiele zeigen aber, daß, wenn wir für α eine passende Schranke einführen, der obige Sachverhalt auch noch für nicht-konvexe Mengen zutrifft. Es erhebt sich die Frage: Welches ist die charakteristische Eigenschaft, die eine Menge A aufweisen muß, damit für ein bestimmtes α $VC_\alpha(A)$ noch ein Polynom in α von höchstens n. Grade ist? Zur Beantwortung dieser Frage hat *H. Hadwiger* [3] folgenden Unterkonvexitätsbegriff eingeführt:

(10.1) Eine abgeschlossene Menge A heißt unterkonvex vom Grade γ, wenn der Durchschnitt jeder Kugel vom Radius

[17]) *Bonnesen-Fenchel* [1], S. 49.

$\alpha < \gamma$ mit A, sofern er nicht leer ist, zusammenhängend und von der Charakteristik (Charakteristik von Euler-Poincaré) 1 ist, wenn dies aber für kein $\alpha > \gamma$ zutrifft.

Unter Beschränkung auf Mengen, die abgeschlossene Hüllen eines Gebietes sind und in jedem ihrer Randpunkte stetige Hauptkrümmungen besitzen, hat *Hadwiger* [3] folgendes Teilresultat in der aufgeworfenen Frage erzielt:

(10.2) Das Volumen von $C_\alpha(A)$ ist jedenfalls dann ein Polynom in α, wenn $\alpha \leqq \gamma$ ist.

(10.3) Es ist zu vermuten, daß diese Bedingung $\alpha \leqq \gamma$, ohne Einschränkung betreffend die Menge A (außer der selbstverständlichen Beschränktheit und der bequemen Abgeschlossenheit), nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Notwendig allerdings nur dann, wenn das Polynom, welches das Volumen von $C_\alpha(A)$ als Funktion von α ausdrückt, stets dasselbe sein soll. Wie das zu verstehen ist, soll folgendes Beispiel verdeutlichen: A sei eine Kreislinie im R_2 vom Radius r. Hier ist $\gamma = r$. Zwar ist für jedes α $(0 \leqq \alpha < \infty)$ $VC_\alpha(A)$ ein Polynom in α, aber nicht stets mit denselben Koeffizienten (und übrigens auch nicht vom gleichen Grad). Für $\alpha \leqq \gamma = r$ ist nämlich $VC_\alpha(A) = \pi\{(r+\alpha)^2 - (r-\alpha)^2\} = 4\pi r\alpha$, für $\alpha > \gamma = r$ ist dagegen $VC_\alpha(A) = \pi(r+\alpha)^2 = \pi\alpha^2 + 2\pi r\alpha + \pi r^2$.

Da die Charakteristik einer Menge ein schwer zu handhabender topologischer Begriff ist, drängt sich das Bedürfnis auf, den Hadwigerschen Unterkonvexitätsbegriff durch einen voraussichtlich äquivalenten zu ersetzen, der aber mit einfachern geometrischen Begriffen auskommt. Zu dem Zwecke denken wir uns in der Hadwigerschen Definition (10.1) die bewegliche Kugel vom Radius α nicht alle möglichen Lagen annehmend, sondern nur diejenigen, wo sie Stützkugel an A ist.

(10.4) Unter dem Unterkonvexitätsgrad α_1 von A verstehen wir dann die (nach (7.1) existierende) Zahl mit der Eigenschaft, daß alle Stützkugeln von A vom Radius $\alpha < \alpha_1$ einen einzigen Stützpunkt besitzen, wobei dies aber für kein $\alpha > \alpha_1$ zutreffe; m. a. W. der Unterkonvexitätsgrad α_1 ist die

größte Zahl, für welche noch alle Lote der Länge $\alpha < \alpha_1$ eindeutig sind.

Unter Beachtung der Äquivalenzen (6.6) kann man auch sagen: Der Unterkonvexitätsgrad α_1 einer Menge A ist die größte Zahl mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha < \alpha_1$ die außerhalb von A liegende Teilmenge von $C_\alpha(A)$ sich als Vereinigungsmenge von (punktfremden) Loten der Länge α darstellen läßt, d. h. $\dot{L}_\alpha(A) = \dot{C}_\alpha(A)$ ist.

Zum Unterkonvexitätsbegriff (10.4) gelangt man übrigens auch in ganz natürlicher Weise von anderer Seite her: Nach (9.4) ist eine konvexe Menge dadurch charakterisiert, daß jedes Lot gefällt auf die Menge eindeutig ist. Da die Formel von Steiner-Minkowski auch für jedes α gilt $(0 \leqq \alpha < \infty)$, falls die Menge konvex ist, so ist zu vermuten, daß zwischen den beiden Tatsachen ein enger Zusammenhang besteht. Deshalb führen wir bei beliebigen Mengen die größte Zahl α_1 ein, für welche alle Lote der Länge $\alpha < \alpha_1$ noch eindeutig sind und vermuten, daß auch hier für jedes $\alpha \leqq \alpha_1$ das Volumen von $C_\alpha(A)$ ein Polynom in α sein wird. Bei konvexen Mengen ist $\alpha_1 = \infty$ zu setzen.

Ein naheliegender Ausgangspunkt für die Definition eines Unterkonvexitätsgrades wäre an sich die bekannte übliche Definition der konvexen Mengen: Eine Menge heißt konvex, wenn sie mit zwei Punkten P und Q die ganze Strecke $\overline{PQ}$ enthält. Wie ist dieser Wortlaut abzuändern bei der entsprechenden Definition der Unterkonvexität? Als sinngemäße Abänderung ist die folgende anzusehen:

(10.5) Eine Menge A heißt unterkonvex vom Grade α_0, wenn α_0 die größte Zahl ist mit der Eigenschaft, daß zu jedem Punktepaar (Q, Q') von A, dessen Abstand 2α kleiner ist als $2\alpha_0$, ein Q und Q' verbindender Kreisbogen existiert, der nicht größer ist als ein Halbkreis, höchstens die Krümmung $1 : \alpha_0$ hat und ganz in A liegt.

Man erkennt, daß diese Definition eines Unterkonvexitätsgrades, wie es sein muß, für $\alpha_0 = \infty$ auf die übliche, oben angegebene Definition der Konvexität führt.

Man könnte nun denken, daß beide Unterkonvexitätsdefinitionen (10.4) und (10.5) äquivalent sind, besonders deshalb, weil sie ja beide gewonnen wurden aus entsprechenden, nach (9.4) sicher äquivalenten und charakteristischen Eigenschaften der konvexen Mengen. Dem ist aber keineswegs so. Während für konvexe Mengen also $\alpha_0 = \alpha_1 = \infty$ ist, besteht für beliebige Mengen nur noch die folgende allgemein gültige Ungleichung:

(10.6) $$\alpha_0 \leqq \alpha_1 .$$

Beweis: Angenommen es sei für eine gewisse Menge A $\alpha_0 > \alpha_1$, es existiere also, trotzdem die Bedingungen von (10.5) erfüllt sind, ein Punkt P von dem aus zwei verschiedene Lote $\overline{PQ} = \alpha < \alpha_0$ und $\overline{PQ'}$ $(Q \neq Q')$ auf A gefällt werden können. Wir verbinden Q und Q' durch einen, die Bedingungen von (10.5) erfüllenden, aber sonst beliebigen Kreisbogen (QQ'), der also nach Voraussetzung ganz in A liegt. Anderseits können wir zeigen, daß jedenfalls die Mitte M von (QQ') nicht zu A gehören könnte, wenn $\alpha_0 > \alpha_1$ wäre, woraus sich ein Widerspruch ergibt. Wir drehen den Bogen (QQ') (falls nötig) um die Strecke $\overline{QQ'} < 2\alpha$ als Drehachse in den R_2 bestimmt durch $\overline{PQ}$ und $\overline{PQ'}$, derart, daß die hohle Seite des Bogens P zugewendet ist. Der Bogen sei in dieser neuen Lage mit $(QQ')_1$, seine Mitte mit M_1 bezeichnet. Ferner verbinden wir Q und Q' durch einen Kreisbogen, der das gleichschenklige Dreieck PQQ' zu einem Kreissektor ergänzt und der mit $(QQ')_2$ bezeichnet sei. Die Mitte dieses Bogens sei M_2. Schließlich sei die Mitte von $\overline{QQ'}$ mit M_3 bezeichnet. Unter Benützung der Dreiecksungleichung und unter Berücksichtigung, daß wegen $\alpha < \alpha_0$ die Krümmung $1:\alpha$ des Bogens $(QQ')_2$ größer ist als $1:\alpha_0$, somit auch größer als diejenige des Bogens $(QQ')_1$, erhält man $\overline{PM} \leqq \overline{PM_3} + \overline{M_3M} = \overline{PM_3} + \overline{M_3M_1} < \overline{PM_3} + \overline{M_3M_2} = \overline{PM_2} = \overline{PQ} = \alpha$. Es wäre also $\overline{PM} < \overline{PQ}$. Weil aber $\overline{PQ}$ Lot auf A ist, so kann M kein Punkt von A sein.

Nimmt man für A den Rand eines Quadrates von der

Seite a, das in den Ecken durch Viertelskreise vom Radius $r < a:2$ abgerundet ist, dann ist $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 = r$, womit bewiesen ist, daß im allgemeinen α_0 und α_1 nicht gleich sind.

(10.7) Das vorige Beispiel zeigt auch, daß die Bedingung $\alpha < \alpha_0$ zwar vermutlich stets hinreichend für die Gültigkeit der Steiner-Minkowskischen Formel ist, aber sicher nicht unbedingt notwendig. Obschon nämlich $\alpha_0 = 0$ ist, läßt sich $VC_\alpha(A)$ trotzdem als Polynom in α darstellen, falls $\alpha < r$ ist. Der Unterkonvexitätsbegriff (10.5) ist also im Hinblick auf unser Ziel, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Steiner-Minkowskischen Formel zu finden, zu eng gefaßt. Er ist aber insofern interessant, als es auf den ersten Blick wenig wahrscheinlich aussieht, daß noch eine schwächere Verallgemeinerung der Konvexität möglich ist, als die unter (10.4) gegebene.

(10.8) Es sind noch andere Definitionen für den Unterkonvexitätsgrad einer Menge möglich, die dann im Gegensatz zu α_0 zwar vermutlich stets notwendige, aber sicher nicht immer hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Steinerschen Formel liefern. Eine solche wäre z. B. die Schranke α_2 für die Gültigkeit der Gleichung $C_{-\alpha} C_\alpha(A) = A$. Nimmt man für A zwei Punkte P und Q, so ist $\alpha_2 = \infty$; $VC_\alpha(A)$ läßt sich aber nur bis $\alpha \leqq \overline{PQ}:2$ als Polynom in α darstellen.

(10.9) Man könnte auch daran denken, in Abschwächung des Hadwigerschen Unterkonvexitätsgrades (10.1) den Zusatz „und von der Charakteristik 1“ wegzulassen. Dazu wäre zunächst zu bemerken, daß die Existenz einer Schranke, die den dann in (10.1) noch verbleibenden Anforderungen genügt, im allgemeinen nicht gesichert ist, wie folgendes Beispiel zeigt: A sei der Rand einer Ellipse. Bei genügend großem α ist der Durchschnitt einer beweglichen Kugel vom Radius α mit A zusammenhängend, bei passend gewähltem kleinerem α aber nicht immer. — Ferner wäre die Forderung, daß jede Kugel vom Radius α mit A zusammenhängenden (oder leeren) Durchschnitt hat, wiederum keine hinreichende Bedingung dafür, daß sich das

Volumen von $C_\alpha(A)$ als Polynom in α darstellen läßt. Man denke sich etwa in die Mitte der Seitenfläche eines Würfels von der Kante $2a$ ein halbkugelförmiges Loch vom Radius $r<a$ gegraben. Hier hat jede Kugel von jedem Radius $\alpha\,(0<\alpha\leqq\infty)$ mit der so entstehenden Menge A zusammenhängenden oder leeren Durchschnitt. Wie man aber nachweisen kann, gilt hier die Steinersche Formel nicht mehr, sobald $\alpha>r$ ist. Hier ist $\alpha_1=\gamma=r$.

§ 11. Überkonvexe Mengen

Es ist hier, um Mißverständnissen vorzubeugen, zum vorneherein zu bemerken, daß es sich bei diesem Begriff nicht etwa um eine spezielle Klasse konvexer Mengen handelt, im Gegensatz etwa zur Überkonvexitätsdefinition von *A. Mayer* [1].

(11.1) *H. Hadwiger* [3] definiert eine Menge A als überkonvex vom Grade δ, wenn ihre abgeschlossene Komplementärmenge im Sinne von (10.1) unterkonvex vom Grade δ ist. Es wird dort unter entsprechenden einschränkenden Voraussetzungen wie in (10.2) bewiesen, daß auch das Volumen der innern Parallelmenge $C_{-\alpha}(A)$ für jedes $\alpha\,(0<\alpha\leqq\delta)$ sich als Polynom von höchstens n. Grade in α darstellen läßt.

(11.2) Auch der Unterkonvexitätsdefinition (10.4) läßt sich eine entsprechende der Überkonvexität zur Seite stellen:

Eine Menge A heißt überkonvex vom Grade $\alpha_1{}^*$, wenn ihre abgeschlossene Komplementärmenge $\overline{K}(A)$ im Sinne von (10.4) unterkonvex vom Grade $\alpha_1{}^*$ ist.

Es ist aus Gründen vollkommener Analogie klar, wie die den andern Unterkonvexitätsbegriffen entsprechenden Überkonvexitätsdefinitionen lauten müßten, weshalb wir nicht näher darauf eingehen wollen.

Im Hinblick auf die Definitionen (11.1) und (11.2) ist einleuchtend, daß, wenn die Vermutung $\alpha_1=\gamma$ richtig ist, auch $\alpha_1{}^*=\delta$ sein muß.

§ 12. Kriterien für die Gültigkeit der Gleichung $C_\alpha(A)C_\alpha(B) = C_\alpha(AB)$

Die Gültigkeit dieser Gleichung spielt für die Volumenbetrachtungen in § 13 eine Rolle. Wir wollen deshalb die Bedingungen, unter denen sie gilt, etwas genauer studieren. Zu dem Zwecke schicken wir zunächst zwei Definitionen voraus, die den Definitionen (10.4) und (10.5) entsprechen:

(12.1) $A + B$ sei die Vereinigungsmenge von A und B; β_1 bezeichne dann die größte Zahl mit der Eigenschaft, daß alle Lote der Länge $\alpha < \beta$, gefällt von einem Punkte P auf $A + B$ ihre Fußpunkte entweder alle in A oder alle in B haben.

Sind also $\overline{PQ} = \alpha < \beta_1$ und $\overline{PQ'} = \alpha < \beta_1$ zwei Lote gefällt von P auf $A + B$, so ist nie $Q \in A - B$ und $Q' \in B - A$ (oder umgekehrt).

(12.2) Ferner sei β_0 die größte Zahl mit der Eigenschaft, daß zu jedem Punktepaar (Q, Q') mit $Q \in A - B$ und $Q' \in B - A$, dessen Abstand $\overline{QQ'} = 2\alpha$ kleiner ist als $2\alpha_0$, ein Q und Q' verbindender Kreisbogen existiert, der nicht größer ist als ein Halbkreis, höchstens die Krümmung $1 : \alpha_0$ hat und ganz in $A + B$ liegt.

Vollkommen analog wie den entsprechenden Satz (10.6) beweist man:

(12.3) $$\beta_0 \leqq \beta_1$$

Der folgende Hilfssatz ist bequem zum Beweis von (12.5):

(12.4) Ist P ein Punkt von $K(A + B)$ oder des Randes von $A + B$ und $\overline{PQ}$ Lot auf A, $\overline{PR} > \overline{PQ}$ Lot auf B, wobei $Q \in A - B$ und $R \in B - A$ ist, so existiert auf $\overline{PR}$ ein Punkt P', von dem aus auf $A + B$ zwei Lote existieren, $\overline{P'R}$ und $\overline{P'Q'} = \overline{P'R}$, mit $Q' \in A - B$.

Beweis: Mit $M(A)$ sei die Menge aller Punkte bezeichnet, die von A kleinern Abstand haben als von B. Ist $\overline{PQ} < \overline{PR}$, dann ist $P \in M(A)$. Wegen $R \in B - A$ ist natürlich anderseits $R \in KM(A)$. Im Innern der Strecke $\overline{PR}$ liegt somit mindestens ein Punkt P' des Randes von $M(A)$, also ein Punkt, der von A und B gleichen Abstand hat, und zwar

von B den Abstand $\overline{P'R}$; denn mit $\overline{PR}$ ist auch $\overline{P'R}$ Lot auf B und außerdem einziges Lot (4.14!), so daß beim andern Lot $\overline{P'Q'}$ auf A sicher $Q' \in A - B$ ist. Wir haben also in $\overline{P'Q'}$ ein Lot auf A mit $Q' \in A - B$ und in $P'\overline{R}$ ein gleich langes Lot auf B (m. a. W. $\overline{P'Q'}$ und $\overline{P'R}$ sind Lote auf $A + B$), mit $R \in B - A$, was zu beweisen war.

β_1' sei die größte Zahl für welche die Gleichung $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B) = C_\alpha(A\,B)$ für jedes $\alpha < \beta_1'$ gilt. Dann ist:

(12.5) $$\beta_1 \leqq \beta_1'$$

d. h. das Fehlen von Punkten P, von denen aus Lote $\overline{PQ}$ und $\overline{PQ'} < \alpha$ auf $A + B$ gefällt werden können mit $Q \in A - B$ und $Q' \in B - A$ ist jedenfalls hinreichend für die Gültigkeit der Gleichung $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B) = C_\alpha(A\,B)$.

Beweis: Weil $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B) \supseteq C_\alpha(A\,B)$ nach (2.23.2)* schon gesichert ist, haben wir nur noch zu zeigen, daß aus der Voraussetzung und $P \in C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)$ folgt $P \in C_\alpha(A\,B)$. — Wenn $P \in A\,B$ ist, so ist natürlich auch $P \in C_\alpha(A\,B)$, so daß im wesentlichen noch zwei Fälle verbleiben:

1. Fall: $P \in K(A + B) \cdot C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)$. $\overline{PQ}$ sei ein Lot auf A, $\overline{PR}$ ein Lot auf B und es sei $\overline{PQ} \leqq \overline{PR}$. Wegen $P \in C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)$ und der Abgeschlossenheit von A und B ist $0 < \overline{PQ} < \alpha$, $0 < \overline{PR} < \alpha$. Ist Q oder $R \in A\,B$, so ist natürlich $P \in C_\alpha(A\,B)$. Wir zeigen, daß die andere Möglichkeit $Q \in A - B$, $R \in B - A$ unter den gemachten Voraussetzungen gar nicht eintreten kann. Auf $\overline{PR}$ würde nämlich nach Hilfssatz (12.4), weil die dortigen Voraussetzungen $Q \in A - B$ und $R \in B - A$ erfüllt sind, ein Punkt P' existieren (ist $\overline{PQ} = \overline{PR}$, so ist P dieser Punkt), mit Loten $\overline{P'Q'}$ auf A und $\overline{P'R} = \overline{P'Q'}$ auf B, wobei $Q' \in A - B$ ist. In $\overline{P'Q'}$ und $\overline{P'R}$ hätten wir also zwei Lote $< \alpha$ auf $A + B$ mit $Q' \in A - B$ und $R \in B - A$, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Fall: $P \in A - B$. $\overline{PR}$ sei Lot auf B. Weil $P \in C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)$ und B abgeschlossen ist, so ist $0 < \overline{PR} < \alpha$. Ist nun $R \in A\,B$, so ist selbstverständlich $P \in C_\alpha(A\,B)$. Von der Möglichkeit $R \in B - A$ kann man wieder zeigen, daß sie gar nicht eintreten kann. Wegen $P \in A - B$ und $R \in B - A$ würde näm-

lich auf $\overline{PR}$ ein Randpunkt S von A liegen. Es ist sogar $S \in A - B$, sonst wäre $\overline{PR}$ nicht Lot auf B. Wegen $S \in A - B$ und $R \in B - A$ müßte nach Hilfssatz (12.4) auf $\overline{SR}$ ein Punkt P' liegen, von dem aus zwei Lote $\overline{P'Q'}$ und $\overline{P'R} < \alpha$ auf $A + B$ existieren, mit $R \in B - A$ und $Q' \in A - B$, was der Voraussetzung widerspricht. — Vertauscht man noch die Rollen von A und B, so ist der Beweis erbracht.

Es ist zu vermuten, daß $\beta_1 = \beta_1'$ ist.

Bemerkungen:

(12.6) 1. α_0 und α_1 seien die Unterkonvexitätsgrade von $A + B$ im Sinne von (10.5) bzw. (10.4). Diese sind natürlich höchstens so groß wie die entsprechenden Grade β_0 und β_1. Ferner ist nach (12.3) und (12.5) $\beta_0 \leqq \beta_1 \leqq \beta_1'$. Wir haben also folgende sicher geltende Beziehungen:

$$1.\ \alpha_0 \leqq \beta_0 \leqq \beta_1 \leqq \beta_1'$$
$$2.\ \alpha_1 \leqq \beta_1.$$

Mit Ausnahme der Beziehung $\beta_1 \leqq \beta_1'$ (wo, wie erwähnt, vermutlich allgemein $\beta_1 = \beta_1'$ ist) gilt im allgemeinen das Gleichheitszeichen in den oben stehenden Ungleichungen nicht, wie man sich an einfachen Beispielen leicht klar macht; d. h. $\alpha < \beta_0$, also erst recht $\alpha < \alpha_0$, ferner $\alpha < \alpha_1$ sind sicher nur hinreichende aber keineswegs notwendige Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung $C_\alpha(A)\, C_\alpha(B) = C_\alpha(A\,B)$, während vermutlich $\alpha < \beta_1$ notwendig und hinreichend dafür ist. Insbesondere besagt die Bedingung $\alpha < \alpha_1$ in Worten ausgedrückt, wie erinnerlich: Jedes Lot der Länge $\alpha < \alpha_1$ gefällt auf $A + B$ ist eindeutig. Im Hinblick auf die Äquivalenzen (6.6) kann man also sagen: Aus $L_\alpha(A + B) = C_\alpha(A + B)$ folgt $C_\alpha(A)\, C_\alpha(B) = C_\alpha(A\,B)$.

(12.7) 2. Für die Gültigkeit der Gleichung $C_\alpha(A)\, C_\alpha(B) = C_\alpha(A\,B)$ kann die Abgeschlossenheit von A und B wesentlich sein. Beispiel: A und B seien zwei gleich große Würfel, die mit einer Seitenfläche aneinanderstoßen. Sind sie abgeschlossen, so ist $C_\alpha(A)\, C_\alpha(B) = C_\alpha(A\,B)$, sind sie aber offen, so ist $C_\alpha(A)\, C_\alpha(B) \supset C_\alpha(A\,B) = 0$.

(12.8) 3. Die Bedingung $C_{-\alpha}C_{\alpha}(A+B)=A+B$ ist bereits zu schwach, um hinreichend zu sein für die Gültigkeit der Gleichung $C_{\alpha}(A)\,C_{\alpha}(B)=C_{\alpha}(A\,B)$. Als Gegenbeispiel wähle man für A und B je einen Punkt. Hier ist für jedes α $(0<\alpha<\infty)$ $C_{-\alpha}C_{\alpha}(A)=A+B$, für $\alpha>\overline{A\,B}:2$ ist dagegen $C_{\alpha}(A)\,C_{\alpha}(B)\supset C_{\alpha}(A\,B)=0$.

§ 13. Volumenbetrachtungen

Da wir in diesem Paragraphen einige Volumenbetrachtungen anstellen, sollen die in Frage stehenden Mengen nicht nur abgeschlossen, wie bisher, sondern auch beschränkt sein. — Es sei $V(A)$ das Jordanvolumen von A, $V_{\alpha}(A)=VC_{\alpha}(A)$ dasjenige von $C_{\alpha}(A)$ und $V_{-\alpha}(A)=VC_{-\alpha}(A)$ dasjenige von $C_{-\alpha}(A)$. — Wir erinnern an die folgenden Sätze:

(13.1) Mit $V(A)$ und $V(B)$ existiert auch $V(A+B)$, $V(A-B)$ und $V(A\,B)$.

(13.2) Es ist $V(A+B)+V(A\,B)=V(A)+V(B)$, somit, wenn $A\,B=0$ ist, $V(A+B)=V(A)+V(B)$.

(13.3) Ferner gilt für $A\supseteq B$: $V(A-B)=V(A)-V(B)$.

(13.4) Nach *F. Behrend* [1] existiert das Volumen $V_{\alpha}(A)$ von $C_{\alpha}(A)$ für jedes α $(0<\alpha<\infty)$. — Dual dazu gilt:

(13.4)* $V_{-\alpha}(A)$ existiert für jedes α $(0<\alpha<\infty)$.

Beweis: Nach (13.4) existiert $V_{\alpha}(A)=VC_{\alpha}(A)$ und ebenso $VC_{\alpha}G(A)$. Daraus folgt nach (13.1) die Existenz von $V(C_{\alpha}(A)-C_{\alpha}G(A))=VC_{-\alpha}(A)$.

(13.5) Aus $\dot{L}_{\alpha}(A)=\dot{C}_{\alpha}(A)$ $(\alpha>0)$ folgt die Existenz des Volumens $V(A)$ von A, d. h. das Volumen von A existiert sicher dann, wenn der Unterkonvexitätsgrad α_1 von A (siehe (10.4)) positiv ist.

Beweis: Aus $\dot{L}_{\alpha}(A)=\dot{C}_{\alpha}(A)$ $(\alpha>0)$ folgt nach (8.2) $C_{-\alpha}C_{\alpha}(A)=A$. Das Volumen von $C_{-\alpha}C_{\alpha}(A)$ existiert aber nach (13.4), (13.4)*.

Ähnlich beweist man:

(13.5)* Das Volumen $V(A)$ von A existiert sicher dann, wenn der Überkonvexitätsgrad $\alpha_1{}^*$ von A positiv ist.

Für alle $\alpha\,(0<\alpha<\infty)$ gilt die Ungleichung

(13.6) $$V_\alpha(A)+V_\alpha(B)\geqq V_\alpha(A+B)+V_\alpha(A\,B)$$

Beweis: A und B sind nach Voraussetzung beschränkt und damit auch $A+B$ und $A\,B$, so daß nach (13.1) alle vier in (13.6) vorkommenden Jordaninhalte jedenfalls existieren. Ferner existiert nach (13.1) auch $V(C_\alpha(A)C_\alpha(B))$. Setzt man nun in (13.2) anstelle von A und B die Mengen $C_\alpha(A)$ und $C_\alpha(B)$, so folgt zunächst $V_\alpha(A)+V_\alpha(B)=V_\alpha(A+B)+V(C_\alpha(A)\,C_\alpha(B))$. Da aber nach (2.23.2)* $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)\supseteq C_\alpha(A\,B)$ ist, so folgt $V(C_\alpha(A)\,C_\alpha(B))\geqq VC_\alpha(A\,B)=V_\alpha(A\,B)$, woraus sich (13.6) ergibt.

Dual zu (13.6) gilt die Relation:

(13.6)* $V_{-\alpha}(A)+V_{-\alpha}(B)\leqq V_{-\alpha}(A+B)+V_{-\alpha}(A\,B)\ (0<\alpha<\infty)$.

Beweis: Setzen wir in (13.2) anstelle von A die Menge $C_{-\alpha}(A)$, anstelle von B die Menge $C_{-\alpha}(B)$, so folgt: $VC_{-\alpha}(A)+VC_{-\alpha}(B)=V(C_{-\alpha}(A)+C_{-\alpha}(B))+V(C_{-\alpha}(A)\,C_{-\alpha}(B))$. Nun ist nach (2.23.2) $C_{-\alpha}(A)+C_{-\alpha}(B)\subseteq C_{-\alpha}(A+B)$, woraus folgt $V(C_{-\alpha}(A)+C_{-\alpha}(B))\leqq VC_{-\alpha}(A+B)$. Beachtet man noch, daß nach (2.22)* $C_{-\alpha}(A)\,C_{-\alpha}(B)=C_{-\alpha}(A\,B)$ ist, so ergibt sich $VC_{-\alpha}(A)+VC_{-\alpha}(B)<VC_{-\alpha}(A+B)+VC_{-\alpha}(A\,B)$.

Wann gilt das Gleichheitszeichen in (13.6)? Diesbezüglich läßt sich sagen:

(13.7) $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)=C_\alpha(A\,B)$ ist hinreichende und notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung $V_\alpha(A)+V_\alpha(B)=V_\alpha(A+B)+V_\alpha(A\,B)$.

Beweis: Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt sofort aus dem Beweisgang von (13.6). — Gilt umgekehrt das Gleichheitszeichen in (13.6), so muß $C_\alpha(A\,B)=C_\alpha(A)C_\alpha(B)$ sein. Nach Voraussetzung ist nämlich $VC_\alpha(A)+VC_\alpha(B)=VC_\alpha(A+B)+VC_\alpha(A\,B)$, anderseits nach (13.2) $VC_\alpha(A)+VC_\alpha(B)=VC_\alpha(A+B)+V[C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)]$, woraus folgt $V[C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)]=VC_\alpha(A\,B)$. Wäre nun P ein Punkt von $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)$ der nicht zu $C_\alpha(A\,B)$ gehört, so müßte, weil P wegen der Offenheit von $C_\alpha(A)\,C_\alpha(B)$ innerer Punkt

dieser Menge ist, eine Umgebung $C_\epsilon(P)$ von P existieren, die ganz zu $C_\alpha(A)C_\alpha(B)$ gehört, wobei ϵ zugleich so klein gewählt werden kann, daß $C_\epsilon(P)$ zu $C_\alpha(AB)$ fremd ist. Entgegen der oben gemachten Feststellung würde $V[C_\alpha(A)C_\alpha(B)]$ dann um mindestens das Volumen $VC_\epsilon(P)$ von $C_\epsilon(P)$ größer sein als $VC_\alpha(AB)$.

(13.7)* Dual zu (13.7) gilt:

$C_{-\alpha}(A)+C_{-\alpha}(B)=C_{-\alpha}(A+B)$ ist hinreichende und notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung $V_{-\alpha}(A)+V_{-\alpha}(B)=V_{-\alpha}(A+B)+V_{-\alpha}(AB)$.

Beweis: Wie aus dem Beweisgang von (13.6)* folgt, ist die Bedingung hinreichend. — Gilt umgekehrt das Gleichheitszeichen in (13.6), so schließt man zunächst, daß $VC_{-\alpha}(A+B)=VC_{-\alpha}(A)+VC_{-\alpha}(B)$ ist. Nehmen wir zuerst an, $C_{-\alpha}(A)+C_{-\alpha}(B)$ besitze innere Punkte, somit auch $C_{-\alpha}(A+B)$. Wegen der Volumengleichheit und weil die eine Menge in der andern enthalten ist, haben beide Mengen denselben offenen Kern, da sie aber beide abgeschlossen sind, müssen sie somit identisch sein. — Nun besitze $C=C_{-\alpha}(A)+C_{-\alpha}(B)$ keine innern Punkte. Die Mengenfolge $C_i=C_{-\alpha_i}(A)+C_{-\alpha_i}(B)$ $(i=1,2,\ldots;\alpha_i<\alpha,\alpha_i\to\alpha)$ konvergiert gegen die Menge C; für jedes $\epsilon>0$ gilt also $C_\epsilon(C)\supset C_i$ für „fast alle" i. Analog konvergiert die Mengenfolge $D_i=C_{-\alpha_i}(A+B)$ $(i=1,2,3,\ldots;\alpha_i<\alpha,\alpha_i\to\alpha)$ gegen die Menge $D=C_{-\alpha}(A+B)$. Wegen $\alpha_i<\alpha$ besitzen alle C_i und D_i innere Punkte. Wie oben schon gezeigt, ist dann aber $C_i=D_i$ $(i=1,2,\ldots)$. Die entsprechenden Glieder C_i und D_i der beiden Mengenfolgen C_i und D_i sind also stets identisch, und da sie beide konvergieren, müssen sie dieselbe Grenzmenge haben. Es ist also $C=D$.

Literaturverzeichnis

Behrend F.:

[1] Bemerkungen zur Inhaltstheorie. Math. Ann. 111, 1935.

Beretta L. und *Maxia A.:*

[1] Insiemi convessi e orbiformi. Univ. Roma. Istituto naz. alta Mat. Rend. Mat. sue Appl. 1, 1940.

Bol G.:

[1] Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen. Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver. 51, 1951.

Bonnesen T. und *Fenchel W.:*

[1] Theorie der konvexen Körper. Sammlung „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete". Springer, Berlin, 1934.

Bouligand G.:

[1] Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris, Vuibert, 1932.

Bunt L. N. H.:

[1] Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen. Proefschrift Groningen, 1934.

Chamard L.:

[1] Sur quelques types de conditions imposées à la structure d'un ensemble ponctuel. Ann. di Mat., t. 12, 1934.

[2] Sur les propriétés de la distance d'un point à un ensemble ponctuel. Thèse Poitiers, 1933.

Durand G.:

[1] Sur une généralisation des surfaces convexes. Journal math. pures et appl. Série IX, t. X, 1931.

Hadwiger H.:

[1] Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche. Comment. math. helvetici, vol. 18, fasc. 1, 1945.

[2] Eine Erweiterung der Steiner-Minkowskischen Sätze für Polyeder. Experientia Vol. II/2, 1946.

[3] Über das Volumen der Parallelmengen. Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, neue Folge 3. Bd., 1946.

[4] Inhaltsungleichungen für innere und äußere Parallelmengen. Experientia Vol. II/12, 1946.
[5] Über die erweiterten Steinerschen Formeln für Parallelmengen. Revista Hispano-Americana, 4. Serie, Bd. VI, 1946.

Jessen B.:

[1] Zwei Sätze über konvexe Punktmengen (dänisch). Mat. Tidsskrift B., Kopenhagen, 1940.

Kritikos N.:

[1] Sur quelques propriétés des ensembles convexes. Bull. math. de la Soc. roumaine des sciences, t. 40, 1938.

Mayer A.:

[1] Eine Überkonvexität. Math. Zeitschrift 39, 1934.

Minkowski H.:

[1] Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 8—9, 1900.

Motzkin Th.:

[1] Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes. Rendiconti della Reale Accad. dei Lincei, 1935.

v. Sz. Nagy B.:

[1] Über ein geometrisches Extremalproblem. Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math. 9, 1940.

Riesz F.:

[1] Sur une inégalité intégrale. J. London Math. Soc. 5, 1930.

Lebenslauf

Geboren am 22. Juni 1913 in Bern, besuchte ich die Primar- und Sekundarschule in Interlaken und Bern. Hierauf trat ich an die Literarabteilung des städtischen Gymnasiums in Bern über, wo ich im Herbst 1933 die Maturitätsprüfung bestand.

Nach meiner Immatrikulation an der Universität Bern wandte ich mich den Fächern Mathematik, Physik und Chemie zu, in denen ich im Mai 1941 in Bern das Diplom für das höhere Lehramt erwarb, nachdem ich noch während zwei Semestern die Hochschulen Zürichs besucht hatte.

Schon während meines ganzen Studiums war ich privat als Mathematiklehrer tätig. Nach meiner Diplomierung setzte ich diese Lehrtätigkeit zuerst als Lehrer für Mathematik und Physik am Maturitätsinstitut Humboldtianum in Bern fort, dann an der Gymnasialabteilung des Hochalpinen Töchterinstituts in Fetan (Graub.), wo ich außerdem noch Chemie unterrichtete. Nach einjähriger Tätigkeit an der Kantonsschule in Chur als vollbeschäftigter Hilfslehrer in denselben Fächern, kam ich im Herbst 1952 als Lehrer für Mathematik und Physik ans Freie Gymnasium in Zürich.